

EWA ŁAZUKA
KLAUDIA STĘPKOWSKA

Analiza modyfikacji systemów bonus-malus w ubezpieczeniach komunikacyjnych AC na przykładzie wybranego zakładu ubezpieczeń

Tematyka przedstawionego artykułu związana jest z systemem bonus-malus, który odgrywa ważną rolę w ubezpieczeniach komunikacyjnych. Wiąże się z tym potrzeba oceny jego efektywności. Inspiracją do badań stała się decyzja Towarzystwa Ubezpieczeń i Reasekuracji Warta SA o rezygnacji z tradycyjnego systemu bonus-malus, podjęta przez firmę w 2012 r. W artykule przeprowadzono analizę efektywności systemów bonus-malus stosowanych przez TUiR Warta SA w ubezpieczeniach komunikacyjnych AC w latach 1998–2011. Pozwoliła ona ocenić stopień poprawności funkcjonowania systemu w badanej firmie ubezpieczeniowej i wskazała prawdopodobne przyczyny zmian wprowadzonych w 2012 r.

Słowa kluczowe: system bonus-malus, ubezpieczenia komunikacyjne, składka ubezpieczeniowa, rozkład Poissona.

Wprowadzenie

System bonus-malus w ubezpieczeniach komunikacyjnych definiowany jest jako system określający indywidualny przebieg szkodowości ustalonego kierowcy i jest wykorzystywany do ustalenia poziomu składki ubezpieczającego. Wysokość składki zależna jest w nim od liczby szkód zgłoszonych w dotychczasowych okresach ubezpieczeniowych, na podstawie której ubezpieczający jest klasyfikowany do odpowiedniej klasy taryfowej. Klasy taryfowe dzielimy na te, w których występuje bonus, czyli zniżka, oraz klasy malus charakteryzujące się podwyższeniem składki. Kierowcy o bezszkodowym minionym okresie ubezpieczenia zostają nagrodzeni poprzez awans do klas, w których obowiązują niższe składki, lub pozostają w tej samej klasie, jeśli byli poprzednio w klasie o maksymalnej zniżce. Kierowcy powodujący szkody są ukarani przeniesieniem ich zgodnie z zasadami systemu do klas o wyższej niż dotychczas składce. Należy podkreślić, że wpływ na zaklasyfikowanie ubezpieczającego do odpowiedniej kategorii ma jedynie liczba, a nie wartość szkód zgłoszonych w poprzednim okresie ubezpieczeniowym.

Celem artykułu jest analiza modyfikacji systemów zniżek i zwyżek w dobrowolnych ubezpieczeniach autocasco stosowanych w Towarzystwie Ubezpieczeń i Reasekuracji Warta SA w latach 1998–2011 pod względem ich efektywności. Badanie przeprowadzono w oparciu o tabele systemów bonus-malus obowiązujących w TUiR Warta SA oraz na podstawie dostępnych danych statystycznych dotyczących szkodowości w ubezpieczeniach komunikacyjnych AC w analizowanym okresie.

Ubezpieczenie autocasco należy do 3. grupy ubezpieczeń majątkowych i pozostałych osobowych, czyli ubezpieczeń Działu II. Ubezpieczenia z grupy 3. to ubezpieczenia casco pojazdów lądowych, z wyjątkiem pojazdów szynowych, obejmujące szkody w pojazdach samochodowych i pojazdach lądowych bez własnego napędu. Ubezpieczenie autocasco pokrywa koszty naprawy pojazdu w przypadku uszkodzenia lub zniszczenia, a także zapewnia finansową rekompensatę w przypadku jego kradzieży. Jego głównym celem jest ochrona przed możliwymi szkodami oraz rekompensata szkód w chwili ich zaistnienia.

W pierwszej części artykułu została oszacowana wartość oczekiwana liczby roszczeń z jednej umowy ubezpieczenia w okresie jednego roku, którą wykorzystano do dalszych obliczeń. Druga część wprowadza matematyczne podstawy systemu bonus-malus, założenia dotyczące jego konstrukcji oraz zasady działania. W tej części artykułu zaprezentowano również wybrane miary efektywności systemów bonus-malus. W trzeciej części przeprowadzono analizę oraz ocenę efektywności systemu bonus-malus obowiązującego w ubezpieczeniach komunikacyjnych AC w TUiR Warta SA w 2011 r. W końcowej części zaprezentowano wartości wybranych miar efektywności systemów stosowanych przez Wartę w latach 1998–2011. Wyznaczenie wartości poszczególnych miar i przeprowadzenie analizy porównawczej systemów było możliwe dzięki wykorzystaniu arkusza kalkulacyjnego Microsoft Excel oraz środowiska Octave.

1. Oszacowanie częstości roszczeń przy pomocy zmiennej losowej o rozkładzie Poissona

Do opisu zjawiska pojawiania się roszczeń w ubezpieczeniach komunikacyjnych często stosowany jest jednorodny proces Poissona z niezależnymi stacjonarnymi przyrostami¹. Model ten zakłada, że intensywność występowania roszczeń jest stała, czyli rozważane ryzyka cechuje homogeniczność. Jednak w świecie realnym częstość występowania roszczeń jest różna dla różnych umów ubezpieczenia wchodzących w skład jednego portfela. Portfele złożone z takich polis cechuje więc niejednorodność. Jak wykazują badania międzynarodowe, w przypadku takich niehomogenicznych portfeli lepsze dopasowanie do sytuacji rzeczywistej daje stosowanie modelu opartego na rozkładzie ujemnym dwumianowym.

W analizie systemu bonus-malus niezbędny jest odpowiedni dobór modelu liczby roszczeń. Jest to szczególnie ważne przy wyznaczaniu parametru ryzyka charakteryzującego ubezpieczającego, którym jest oczekiwana częstość roszczeń z jednej umowy ubezpieczenia w ciągu okresu bazowego, najczęściej w ciągu jednego roku. Taki parametr określamy mianem parametru częstotliwości lub parametru intensywności procesu pojawiania się szkód² i oznaczamy przez λ . W portfelach jednorodnych, w sytuacji gdy na jedno ryzyko przypada więcej niż jedno roszczenie, do aproksymacji rozkładu liczby roszczeń często wykorzystuje się rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Zatem prawdopodobieństwo pojawienia się k roszczeń w jednostce czasu dane jest wzorem:

1. P. Kowalczyk, E. Poprawska, W. Ronka-Chmielowiec, *Metody aktuarialne*, PWN, Warszawa 2006, s. 21–22.
2. W. Otto, *Ubezpieczenia majątkowe, cz. I, Teoria ryzyka*, WNT, Warszawa 2004, s. 65–66.

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (1)$$

Powyższy model zakłada, że roszczenia z każdej polisy w rozważanym portfelu mają ten sam rozkład Poissona, z identycznym parametrem λ . Wartość parametru λ , która będzie wykorzystywana w dalszej części artykułu, została oszacowana na podstawie dostępnych danych empirycznych. Poniżej prezentujemy metodę wyznaczania takiego oszacowania.

Rozważmy dane dotyczące liczby zawartych umów ubezpieczenia pojazdów oraz liczby dokonanych wypłat z tytułu tych umów. Niech będzie prawdopodobieństwem zdarzenia polegającego na tym, że nie wystąpiła żadna wypłata. Zatem można zapisać jako:

$$p_w = 1 - \frac{\text{liczba wypłat}}{\text{liczba umów}} \quad (2)$$

Natomiast niech będzie prawdopodobieństwem zdarzenia polegającego na tym, że nie wystąpiło żadne roszczenie. Tak więc wartość wyznaczmy ze wzoru na prawdopodobieństwo pojawienia się 0 roszczeń w rozkładzie Poissona:

$$p_s = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \quad (3)$$

Brak roszczenia równoważy fakt, że nie wystąpiła żadna wypłata. Mamy więc zależność:

$$p_w = p_s \Leftrightarrow 1 - \frac{\text{liczba wypłat}}{\text{liczba umów}} = e^{-\lambda} \quad (4)$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór na częstość roszczeń:

$$\lambda = \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\text{liczba wypłat}}{\text{liczba umów}}} \right) \quad (5)$$

Do przeprowadzenia dalszych obliczeń wykorzystamy liczbę zawartych umów ubezpieczenia pojazdów oraz liczbę dokonanych wypłat z tych umów dla osób fizycznych w ubezpieczeniu komunikacyjnym AC w latach 2005–2011 (tabela 1). Należy podkreślić, że przy szacowaniu wartości parametru λ uwzględniamy wyłącznie liczbę tych szkód, które zostały zgłoszone ubezpieczycielowi, a nie liczbę wszystkich zaistniałych szkód.

Tabela 1. Liczba zawartych umów ubezpieczenia pojazdów i liczba dokonanych wypłat z tych umów dla osób fizycznych w ubezpieczeniu AC w latach 2005–2011

Rok	Liczba umów ubezpieczenia pojazdów	Liczba wypłat
2005	3 102 600	410 229
2006	2 913 591	381 909
2007	3 129 351	344 398
2008	3 292 392	372 952
2009	3 603 636	454 011
2010	3 687 307	499 100
2011	3 656 395	451 913

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych KNF³.

3. http://www.knf.gov.pl/opracowania/rynek_ubezpieczen/Dane_o_rynku/Dane_roczne/dzne_roczne.html.

Wyznaczone wartości parametrów λ dla lat 2005–2011 zawiera tabela 2.

Tabela 2. Oszacowane częstości roszczeń λ dla lat 2005–2011

Rok	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
λ	0,141818	0,140502	0,116595	0,120223	0,134660	0,145438	0,131927

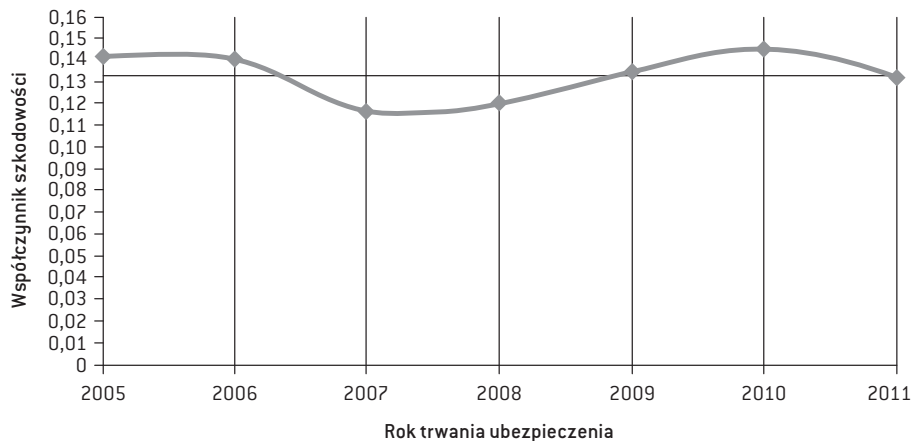
Źródło: opracowanie własne.

Średnią wartość parametru λ wyznaczymy ze wzoru na średnią arytmetyczną:

$$\lambda = \frac{\lambda_{2005} + \lambda_{2006} + \lambda_{2007} + \lambda_{2008} + \lambda_{2009} + \lambda_{2010} + \lambda_{2011}}{N} \quad (6)$$

gdzie N jest liczbą wyznaczonych parametrów λ dla badanych okresów. Zatem średnia wartość parametru λ wynosi $\lambda \approx 0,13$. Analizując wykres 1, możemy zaobserwować, że wartość parametru λ oscyluje wokół wartości 0,13.

Wykres 1. Częstość roszczeń w danym roku ubezpieczeniowym



Źródło: opracowanie własne.

Zatem na podstawie wyliczonej wartości średniej oraz analizy wykresu do obliczeń w dalszej części artykułu za wartość oczekiwaną liczby roszczeń z jednej umowy ubezpieczenia w okresie jednego roku przyjmujemy $\lambda = 0,13$.

2. Istota systemu bonus-malus

Proces wyznaczania składek w ubezpieczeniach komunikacyjnych można podzielić na dwa etapy. Na początku określana jest składka podstawowa (taryfikacja *a priori*). Następnie dopasowuje się ją do indywidualnej szkodowości ubezpieczonego w przeszłości (taryfikacja *a posteriori*)⁴.

4. W. Ostasiewicz, *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe: modelowanie stochastyczne*, Wydawnictwo AE, Wrocław 2004, s. 225.

Klasyfikacja *a priori* obejmuje czynniki opisujące kierowcę (wiek, płeć, okres posiadania prawa jazdy, miejsce zamieszkania) oraz szczegóły dotyczące pojazdu (marka, wiek, rodzaj, miejsce zarejestrowania). Jednak istnieją indywidualne zdolności kierowcy, których nie możemy wyznaczyć *a priori*, takie jak: refleks, przestrzeganie prawa, rozsądek, znajomość kodeksu drogowego, zachowanie pod wpływem stresu, alkoholu. Mają one duży wpływ na liczbę wypadków. Stąd powstała taryfikacja *a posteriori* uwzględniająca dotychczasowy przebieg ubezpieczenia. Kierowcy niepowodujący wypadków są nagradzani obniżeniem składki podstawowej (bonus), a kierowcy powodujący jeden, dwa lub więcej wypadków są karani wyższą składką podstawową (malus). Taryfikacja *a posteriori* ma tak oszacować indywidualne ryzyko, aby każdy ubezpieczony w długim okresie płacił składkę odpowiednią do swojej częstości roszczeń. Taką taryfikację nazywamy systemem zniżek-zwyżek (bonus-malus) i na tej klasyfikacji skupimy uwagę.

2.1. Opis systemu bonus-malus

System bonus-malus w ubezpieczeniach komunikacyjnych określony jest jako system wyznaczania indywidualnej składki, uwzględniający liczbę szkód zgłoszonych przez ubezpieczonego w przeszłości. Na jego podstawie klient zostaje przyporządkowany do odpowiedniej klasy taryfowej, której odpowiada ustalona wysokość składki.

System bonus-malus konstruuje się przy następujących założeniach:

- nie wszyscy ubezpieczeni w ciągu roku powodują przeciętnie tyle samo szkód,
- okresy ubezpieczenia są jednakowej długości,
- liczba szkód spowodowanych przez ubezpieczonego nie zależy od ich wielkości,
- rozkład liczby szkód spowodowanych przez ubezpieczonego w ciągu roku nie zmienia się w czasie,
- rozkład wielkości pojedynczej szkody jest stały w czasie i jest taki sam dla wszystkich ubezpieczonych,
- portfel ubezpieczonych dzieli się na skończoną liczbę klas C_i dla $i = 1, 2, \dots, s$ tak, aby roczna składka zależała jedynie od klasy, w której ubezpieczony się znajduje,
- kwalifikacja ubezpieczonego do odpowiedniej klasy taryfowej zależy jedynie od klasy, w której ubezpieczony znajdował się w poprzednim okresie ubezpieczeniowym, oraz od liczby roszczeń zgłoszonych w tym czasie,
- ubezpieczeni pozostają w tej samej klasie bonus-malus przez cały pojedynczy okres ubezpieczenia.

System bonus-malus opisujemy za pomocą trzech elementów:

- klasy początkowej, do której trafiają wszyscy rozpoczynający ubezpieczenie,
- wektora stawek składki podstawowej $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_s]$ wyrażonego w krotnościach składki podstawowej,
- reguł przejścia z jednej klasy do drugiej, w zależności od liczby szkód zgłoszonych w okresie poprzednim.

W systemach bonus-malus stosowanych w firmie ubezpieczeniowej Warta SA numerację klas rozpoczyna się od najgorszej (o najwyższej składce) do najlepszej (o najniższej składce). Zatem spełniony będzie warunek:

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_s \quad (?)$$

Współczynnik b_i dla $i = 1, 2, \dots, s$ pomnożony przez 100% wyraża procent składki podstawowej, jaką płaci ubezpieczony zakwalifikowany do klasy bonus-malus o numerze i dla $i = 1, 2, \dots, s$.

Reguły przejścia możemy zapisać za pomocą ciągu k macierzy T_k stopnia s , które określone są jako:

$$T_k = [t_{ij}^{(k)}] \quad (8)$$

gdzie elementy tej macierzy możemy określić następująco: $t_{ii}^{(k)} = 1$, gdy k roszczeń powoduje przejście z klasy C_i do klasy C_j , natomiast $t_{ij}^{(k)} = 0$ w pozostałych przypadkach.

Jeżeli założymy określony rozkład liczby zgłoszonych szkód, to prawdopodobieństwo przejścia ubezpieczonego z klasy C_i do klasy C_j w ciągu jednego okresu ma postać⁵:

$$p_{ij}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{ij}^{(k)} \quad (9)$$

gdzie $p_k(\lambda)$ jest prawdopodobieństwem wystąpienia k szkód przy określonej wartości parametru λ , $p_{ij}(\lambda) > 0$ oraz $\sum_{j=1}^s p_{ij}(\lambda) = 1$.

Zatem macierz prawdopodobieństw przejścia możemy zapisać jako:

$$M(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) T_k \quad (10)$$

Do oceny efektywności systemu bonus-malus potrzebujemy rozkładu stacjonarnego oraz oczekiwanego poziomu składki. Jeden ze sposobów uzyskania rozkładu stacjonarnego stanów przedstawiony został w publikacji Lemaire'a⁶. Oznaczmy rozkład stacjonarny jako wektor:

$$a(\lambda) = [a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots, a_s(\lambda)] \quad (11)$$

gdzie $a_i(\lambda)$ jest prawdopodobieństwem znalezienia się ubezpieczonego w klasie C_i po upływie n okresów, przy $n \rightarrow \infty$.

Rozkład stacjonarny $a(\lambda)$ pozwala wyznaczyć średnią, asymptotyczną składkę. Jeżeli jako podstawę obliczeń weźmiemy krotności składki podstawowej dane wektorem b , to składkę asymptotyczną wyznaczymy ze wzoru:

$$P(\lambda) = a(\lambda) \bar{b}^T = \sum_{i=1}^s a_i(\lambda) b_i \quad (12)$$

2.2. Miary efektywności systemu bonus-malus

System bonus-malus jest efektywny, gdy jego zastosowanie w ubezpieczeniach komunikacyjnych przynosi pozytywne skutki, tzn. realizację wyznaczonych celów. Jednym z nich jest dążenie do zmniejszenia szkodowości poprzez karanie kierowców powodujących wypadki wyższą składką (funkcja prewencyjna), drugim – próba lepszego dopasowania składki do indywidualnego ryzyka (funkcja taryfikacyjna).

5. D. Miszczyńska, M. Miszczyński, *Systemy ubezpieczeń bonus-malus, podejście symulacyjne*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko*, red. T. Trzaskalik, Wydawnictwo AE w Katowicach, Katowice 2006, s. 393.

6. J. Lemaire, *Bonus-malus system in automobile insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston 1995, s. 77–78.

Wybrane miary efektywności oceniają system bonus-malus przede wszystkim z punktu widzenia funkcji taryfikacyjnej.

Jedną z miar efektywności systemu bonus-malus jest tzw. względny stacjonarny oczekiwany poziom składki, oznaczany jako RSAL (ang. *Relative Stationary Average Level*)⁷. Wskaźnik RSAL określa względną pozycję przeciętnego ubezpieczonego. Obliczamy go zgodnie ze wzorem:

$$RSAL = \frac{P(\lambda) - \min_i(b_i)}{\max_i(b_i) - \min_i(b_i)} \quad [13]$$

Według Lemaire'a⁸, dla idealnego systemu miara ta powinna wynosić około 0,5 dla przeciętnej częstości roszczeń.

Słabą stroną miary RSAL jest fakt, że na jej wysokość ogromny wpływ ma maksymalna składka. W sytuacji gdy w rzeczywistości mała liczba ubezpieczonych znajduje się w tej klasie, maksymalna składka nie powinna w tak dużym stopniu oddziaływać na poziom wskaźnika RSAL. W związku z tym, chcąc ograniczyć wpływ maksymalnej składki, należy zastąpić jej wartość przez składkę początkową b_{i_0} . Zmodyfikowany RSAL ma wtedy postać:

$$RSAL_2 = \frac{P(\lambda) - \min_i(b_i)}{b_{i_0} - \min_i(b_i)} \quad [14]$$

Według Lemaire'a optymalna wartość tej miary powinna wynosić 1.

Trzecią miarą reakcji systemu na zmianę częstości roszczeń jest tzw. elastyczność Loimaranta (ang. *Loimaranta efficiency*)⁹ będąca współczynnikiem elastyczności składki względem zmian parametru λ . Jest ona zdefiniowana następującym wzorem:

$$\eta(\lambda) = \frac{\frac{dP(\lambda)}{P(\lambda)}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = \frac{P'(\lambda)\lambda}{P(\lambda)} \quad [15]$$

System bonus-malus nazwiemy elastycznym, gdy $\eta(\lambda) \rightarrow 1$.

3. Analiza systemu bonus-malus stosowanego w TUiR Warta SA w 2011 r.

Firma ubezpieczeniowa Warta SA opisuje reguły przejścia między klasami taryfowymi przy pomocy tabel. Sposób prezentacji systemu w tym towarzystwie możemy zaobserwować na podstawie tabeli systemu bonus-malus stosowanego w 2011 r. w ubezpieczeniach komunikacyjnych AC (tabela 3).

W tej części artykułu zostanie przeprowadzona analiza systemu bonus-malus stosowanego w Towarzystwie Ubezpieczeń i Reasekuracji Warta SA w 2011 r. Obliczenia oraz wykresy wykonano w Microsoft Office Excel oraz za pomocą programu napisanego w języku Octave.

7. J. Lemaire, *Automobile insurance, actuarial models*, Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston 1985, s. 195.

8. J. Lemaire, *Bonus-malus ...*, op. cit., s. 64.

9. R. Kaas, M.J. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, *Modern actuarial risk theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2001, s. 141.

Tabela 3. System bonus-malus stosowany w TUiR Warta SA w 2011 r.

Klasa	% składki podstawowej	Wpływ liczby szkód na zmianę klasy			
		0 szkód	1 szkoda	2 szkody	3 i więcej szkód
1	200	2	1	1	1
2	150	3	1	1	1
3	125	4	1	1	1
4	100	5	2	1	1
5	90	6	3	2	1
6	80	7	4	2	1
7	70	8	5	3	1
8	60	9	6	3	1
9	50	10	7	3	1
10	50	11	7	3	1
11	40	12	8	3	1
12	40	13	8	3	1
13	40	13	9	4	1

Źródło: Ogólne warunki ubezpieczenia autocasco standard (ACS) wraz z opcjami dodatkowymi¹⁰.

W przedstawionym systemie bonus-malus wyróżniamy $s = 13$ klas taryfowych. Najwyższa stawka, którą płaci ubezpieczony, wynosi 200% składki podstawowej. Po dziesięcioletnim okresie bezszkodowej jazdy ubezpieczony opłaca tylko 40% podstawowej składki. Możemy zauważyć również surowe reguły przejścia. Dla przykładu, kierowca płacący składkę w wysokości 100% składki podstawowej (klasa $i = 4$), w przypadku zgłoszenia jednej szkody przechodzi do poziomu 150% składki podstawowej. W przypadku zgłoszenia $k = 3$ i więcej szkód w ciągu jednego roku, kierowcy karani są podwyżką jeszcze bardziej rygorystycznie. W takiej sytuacji, bez względu na to, w której klasie się znajdują, przechodzą do poziomu najwyższej stawki (klasa $i = 1$).

Analizę rozpoczniemy od wyznaczenia rozkładów prawdopodobieństwa wystąpienia k roszczeń. Na podstawie rozkładu Poissona możemy wyznaczyć rozkład wystąpienia k roszczeń w pojedynczym okresie ubezpieczenia. Z wcześniejszych obliczeń wiemy, że $\lambda = 0,13$. Zatem prawdopodobieństwa wystąpienia k roszczeń, dla $k = 0, 1, 2, 3$, wyznaczamy następująco:

$$p_0 = \frac{0,13^0}{0!} e^{-0,13} \approx 0,878095$$

$$p_1 = \frac{0,13^1}{1!} e^{-0,13} \approx 0,114152$$

$$p_2 = \frac{0,13^2}{2!} e^{-0,13} \approx 0,007420$$

$$p_3 = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = 1 - 0,99967 = 0,000333$$

Należy wspomnieć, że ze względu na reguły przejścia stosowane w firmie Warta SA, p_3 oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia co najmniej trzech roszczeń a nie dokładnie trzech.

10. <http://www.owu.edu.pl/wp-content/uploads/2011/10/Warta-OWU-AC-Standard.pdf>, s. 10.

Współrzędne wektora stawek składki podstawowej \bar{b} oraz współrzędne wektora początkowego¹¹ l_0 przedstawione są w tabeli 4.

Tabela 4. Poziom składki oraz wektor początkowy

\bar{b}	2	1,5	1,25	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,5	0,4	0,4	0,4
l_0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

Macierz prawdopodobieństw ma postać:

$$M(\lambda) = \sum_{k=0}^3 p_k(\lambda) T_k = p_0(\lambda) T_0 + p_1(\lambda) T_1 + p_2(\lambda) T_2 + p_3(\lambda) T_3 \quad (16)$$

Zatem macierz prawdopodobieństw przejścia przyjmuje postać podaną w tabeli 5.

Tabela 5. Macierz prawdopodobieństw przejścia

0,121905	0,878095	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,121905	0	0,878095	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,121905	0	0	0,878095	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,007753	0,114152	0	0	0,878095	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,000333	0,00742	0,114152	0	0	0,878095	0	0	0	0	0	0	0	0
0,000333	0,00742	0	0,114152	0	0	0,878095	0	0	0	0	0	0	0
0,000333	0	0,00742	0	0,114152	0	0	0,878095	0	0	0	0	0	0
0,000333	0	0,00742	0	0	0,114152	0	0	0,878095	0	0	0	0	0
0,000333	0	0,00742	0	0	0	0,114152	0	0	0,878095	0	0	0	0
0,000333	0	0,00742	0	0	0	0	0,114152	0	0	0,878095	0	0	0
0,000333	0	0,00742	0	0	0	0	0	0,114152	0	0	0	0,878095	0
0,000333	0	0,00742	0	0	0	0	0	0	0,114152	0	0	0	0,878095
0,000333	0	0	0,00742	0	0	0	0	0	0,114152	0	0	0	0,878095

Źródło: obliczenia własne.

Pierwszy rozkład prawdopodobieństwa znalezienia się ubezpieczonego w poszczególnych klasach (w chwili zawierania umowy) przyjmuje wartości:

$$\alpha(0,13) = [0,007753 \quad 0,114152 \quad 0 \quad 0 \quad 0,878095 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Otrzymany rozkład został wyznaczony jako iloczyn wektora początkowego l_0 i macierzy prawdopodobieństw przejścia $M(\lambda)$ podanej w tabeli 5. Kolejne rozkłady wyznaczono analogicznie jako iloczyn wektora poprzedniego rozkładu i macierzy prawdopodobieństw przejścia $M(\lambda)$.

Systemy bonus-malus to łańcuchy ergodyczne. Odznaczają się one tym, że rozkłady prawdopodobieństwa dążą przy liczbie okresów $n \rightarrow \infty$ do rozkładu stacjonarnego. Zanim określimy rozkład stacjonarny, wyznaczymy stacjonarny poziom składki poprzez pomnożenie wektora rozkładu prawdopodobieństwa przez transponowany wektor poziomu składki \bar{b} . Jako kryterium stabilizacji rozważymy wartość bezwzględną różnicy pomiędzy średnią składką w n-tym roku

11. Rozkład początkowy ma postać wektora l_0 , w którym jedynka odpowiada klasie początkowej (w tym przypadku klasie czwartej), natomiast zero klasom pozostałym.

a średnią składką w roku poprzednim. Przyjmujemy, że system stabilizuje się w roku, w którym wartość bezwzględna tej różnicy po raz pierwszy będzie mniejsza niż 0,000001. Zatem, jeśli:

$$|P(n, \lambda) - P(n-1, \lambda)| < 0,000001 \quad (17)$$

to $m = n - 1$ jest rokiem, po którym system się stabilizuje.

Tabela 6. Stacjonarny poziom składki oraz miary efektywności

Lp	Składka	RSAL	RSAL ₂	Lp	Składka	RSAL	RSAL ₂
1	0,977020	0,360638	0,961701	30	0,481312	0,050820	0,135520
2	0,917724	0,323578	0,862874	31	0,481125	0,050703	0,135209
3	0,837490	0,273432	0,729151	32	0,480980	0,050612	0,134966
4	0,773602	0,233501	0,622670	33	0,480874	0,050546	0,134790
5	0,708939	0,193087	0,514899	34	0,480780	0,050488	0,134634
6	0,685150	0,178218	0,475249	35	0,480706	0,050441	0,134510
7	0,622340	0,138962	0,370567	36	0,480651	0,050407	0,134419
8	0,595082	0,121926	0,325136	37	0,480604	0,050377	0,134340
9	0,586003	0,116252	0,310005	38	0,480566	0,050354	0,134277
10	0,555111	0,096944	0,258518	39	0,480538	0,050336	0,134230
11	0,540043	0,087527	0,233405	40	0,480514	0,050321	0,134191
12	0,532757	0,082973	0,221262	41	0,480495	0,050310	0,134159
13	0,519010	0,074381	0,198350	42	0,480481	0,050301	0,134135
14	0,511355	0,069597	0,185592	43	0,480469	0,050293	0,134115
15	0,506867	0,066792	0,178112	44	0,480459	0,050287	0,134099
16	0,500312	0,062695	0,167186	45	0,480452	0,050283	0,134087
17	0,496270	0,060168	0,160449	46	0,480446	0,050279	0,134077
18	0,493808	0,058630	0,156347	47	0,480442	0,050276	0,134069
19	0,490676	0,056672	0,151126	48	0,480438	0,050274	0,134063
20	0,488554	0,055347	0,147591	49	0,480435	0,050272	0,134059
21	0,487205	0,054503	0,145341	50	0,480433	0,050271	0,134055
22	0,485684	0,053552	0,142806	51	0,480431	0,050270	0,134052
23	0,484593	0,052871	0,140989	52	0,480430	0,050269	0,134050
24	0,483867	0,052417	0,139779	53	0,480429	0,050268	0,134049
25	0,483117	0,051948	0,138528	54	0,480428	0,050268	0,134047
26	0,482558	0,051599	0,137597	55	0,480428	0,050267	0,134047
27	0,482173	0,051358	0,136955	56	0,480428	0,050267	0,134046
28	0,481800	0,051125	0,136334	57	0,480427	0,050267	0,134046
29	0,481514	0,050947	0,135857	58	0,480427	0,050267	0,134046
				59	0,480427	0,050267	0,134046

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie danych przedstawionych w tabeli 6 określimy czas, po jakim rozkład osiąga stacjonarność:

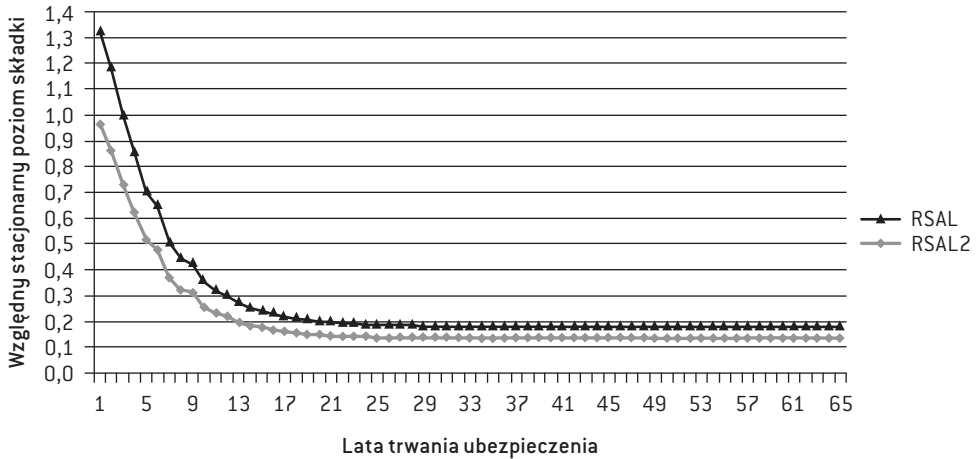
$$|P(57, \lambda) - P(56, \lambda)| = 0,000001$$

$$|P(58, \lambda) - P(57, \lambda)| = 0 < 0,000001$$

Rozkład stacjonarny dla systemu bonus-malus w 2011 r. osiąga stacjonarność po $m = 57$ latach.

Średni stacjonarny poziom składki pozwala nam również wyznaczyć miary efektywności RSAL oraz $RSAL_2$ systemu bonus-malus (tabela 6).

Wykres 2. Wartości wskaźników RSAL oraz $RSAL_2$



Źródło: opracowanie własne.

Na wykresie 2 można zauważyć, że przeciętna składka stabilizuje się na poziomie zbliżonym do stacjonarnego dopiero po około 30 latach, czy nawet po dłuższym okresie. W związku z tym, że składka wolno dąży do rozkładu stacjonarnego oraz maleje wraz z upływem lat, system staje się coraz mniej efektywny.

Przedstawione wartości miar RSAL oraz $RSAL_2$ nie są zbliżone do wartości typowych dla idealnego systemu bonus-malus, o którym wspominał Lemaire. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku elastyczności Loimaranta, której wartość równa 0,320428 dla 2011 r. (tabela 7) jest daleka od oczekiwanej wartości równej 1. Zatem na podstawie wyznaczonych miar możemy stwierdzić, że system bonus-malus stosowany w TUIR Warta w 2011 r. był nieefektywny.

4. Badanie efektywności systemu bonus-malus stosowanego w TUIR Warta SA w latach 1998–2011

Poniżej zostanie zaprezentowana analiza modyfikacji systemu bonus-malus stosowanego w TUIR Warta SA na przestrzeni lat 1998–2011. Obliczenia oraz wykresy wykonano w Microsoft Office Excel oraz za pomocą programu napisanego w języku Octave.

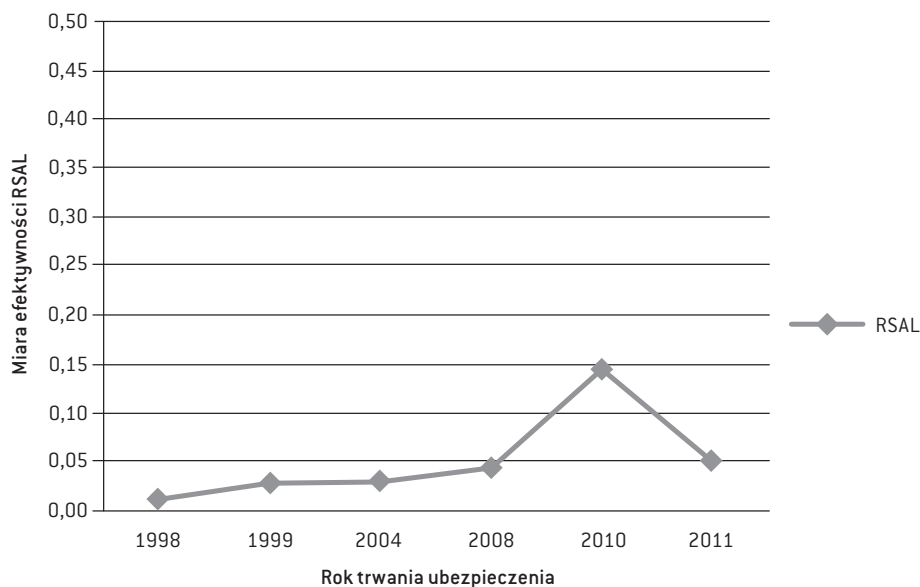
Tabela 7. Miary efektywności systemu w latach 1998–2011

Rok	1998	1999	2004	2008	2010	2011
RSAL	0,012521	0,029128	0,029826	0,044411	0,145096	0,050267
$RSAL_2$	0,037563	0,077673	0,079536	0,118429	0,386922	0,134046
Elastyczność Loimaranta	0,051158	0,170945	0,181597	0,299395	0,594289	0,320428

Źródło: opracowanie własne.

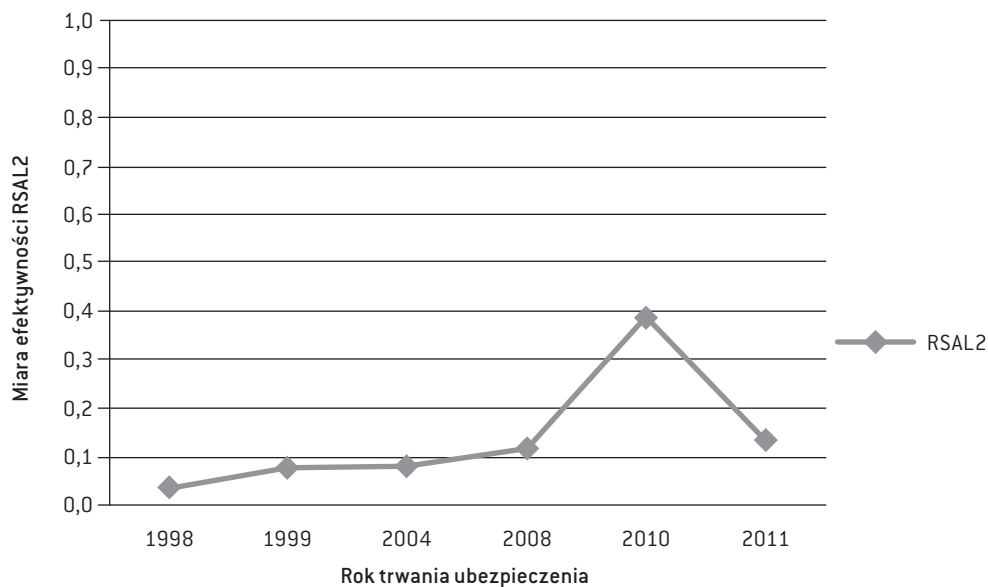
Przedstawione w tabeli 7 wyniki obliczeń mówią o niskich wartościach miar efektywności systemu. Na tle porównywanych systemów bonus-malus najbardziej zrównoważony jest system stosowany w 2010 r. W przypadku elastyczności Loimaranta również w tym roku system najlepiej dopasowuje składkę do indywidualnego ryzyka związanego z częstością roszczeń.

Wykres 3. Miara efektywności RSAL



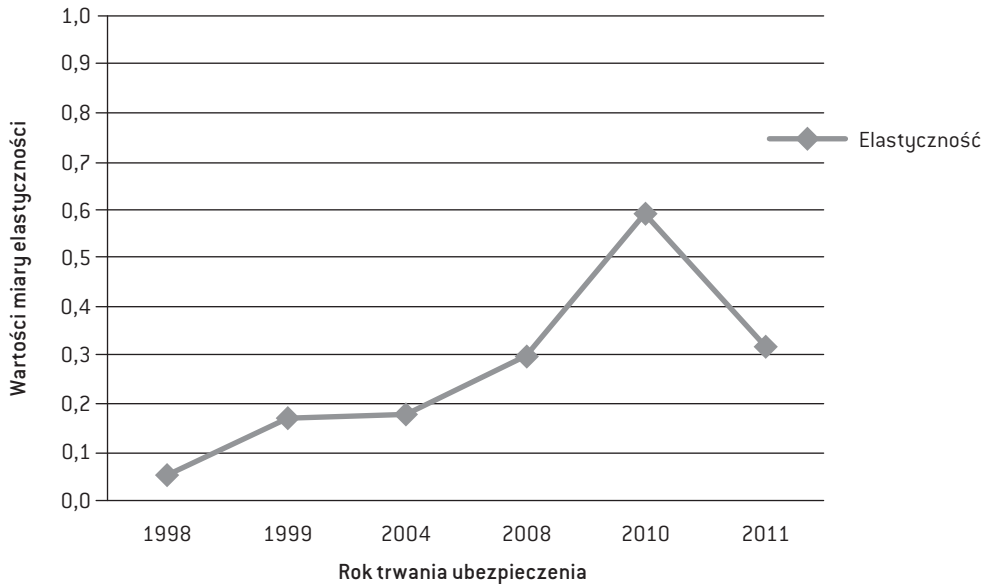
Źródło: opracowanie własne.

Wykres 4. Miara efektywności RSAL₂



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 5. Elastyczność Loimaranta



Źródło: opracowanie własne.

Analizując wykresy 3, 4 oraz 5 możemy zauważyć, że efektywność i elastyczność Loimaranta systemu rosła aż do 2010 r. Niestety po tym roku nastąpił gwałtowny spadek wartości badanych parametrów. Można przypuszczać, że firma poniosła duże straty po zastosowaniu systemu obowiązującego w 2011 r.

Podsumowanie

Wyniki przeprowadzonej analizy pokazują, że do 2010 r. system bonus-malus obowiązujący w TUiR Warta SA działał prawidłowo. Natomiast w 2011 r. nastąpił gwałtowny spadek wartości miar, za pomocą których możliwa jest ocena efektywności systemu bonus-malus. Prawdopodobnie z tego powodu w 2012 r. w firmie ubezpieczeniowej Warta SA tradycyjny system bonus-malus zastąpiono nowym modelem zniżek-zwyżek, uwzględniającym wiele nowych czynników, m.in. liczbę zgłoszonych szkód zarówno w ramach ubezpieczenia AC, jak i OC.

Z biegiem lat okaże się, czy wprowadzenie nowego modelu w ubezpieczeniach AC w 2012 r. przyniesie firmie ubezpieczeniowej Warta SA korzyści finansowe.

Wykaz źródeł

- Kaas R., Goovaerts M.J., Dhaene J., Denuit M., *Modern actuarial risk theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2001.
- Kowalczyk P., Poprawska E., Ronka-Chmielowiec W., *Metody aktuarialne*, PWN, Warszawa 2006.
- Lemaire J., *Automobile insurance, actuarial models*, Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston 1985.

- Lemaire J., *Bonus-malus system in automobile insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston 1995.
- Miszczyńska D., Miszczyński M., *Systemy ubezpieczeń bonus-malus, podejście symulacyjne*, [w:] *Modelowanie preferencji a ryzyko*, red. T. Trzaskalik, Wydawnictwo AE w Katowicach, Katowice 2006.
- Ostasiewicz W., *Składki i ryzyko ubezpieczeniowe: modelowanie stochastyczne*, Wydawnictwo AE, Wrocław 2004.
- Otto W., *Ubezpieczenia majątkowe*, cz. I, Teoria ryzyka, WNT, Warszawa 2004.

Źródła internetowe:

- <http://www.owu.edu.pl/wp-content/uploads/2011/10/Warta-OWU-AC-Standard.pdf> [20.11.2012].
- http://www.knf.gov.pl/opracowania/rynek_ubezpieczen/Dane_o_rynku/Dane_roczne/dzne_roczne.html [10.01.2013].

Analysis of modifications of bonus-malus systems in autocasco motor insurance as exemplified by the selected insurance company

The issues discussed in the article are connected with the bonus-malus system, which plays an important role in motor insurance. It involves the need to assess its effectiveness. What inspired the research was the decision taken in 2012 by Towarzystwo Ubezpieczeń i Reasekuracji Warta SA to resign from the traditional bonus-malus system. The article analyses effectiveness of the bonus-malus systems used by TUIR Warta SA in autocasco motor insurance in the years 1998-2011. It helped assess the extent to which the system functioned correctly at the insurance company in question, and showed the possible causes of the changes introduced in 2012.

Key words: bonus-malus system, motor insurance, insurance premium, Poisson distribution.

DR EWA ŁAZUKA – adiunkt w Katedrze Matematyki Stosowanej Wydziału Podstaw Techniki Politechniki Lubelskiej.

KLAUDIA STĘPKOWSKA – studentka I roku studiów II stopnia na kierunku Matematyka, na Wydziale Podstaw Techniki Politechniki Lubelskiej.