ANNA JĘDRZYCHOWSKA
EWA POPRAWSKA

Klasyczne miary efektywności systemu *bonus-malus*

Głównym celem wprowadzenia systemu bonus-malus *w ubezpieczeniach komunikacyjnych było uzyskanie narzędzia do właściwego dopasowania wysokości składek ubezpieczeniowych do poziomu ryzyka przyjmowanego przez zakłady ubezpieczeń oraz bodźca wpływającego na poziom częstości występowania niekorzystnych zdarzeń losowych tj. kradzieży pojazdów, kolizji drogowych oraz wymuszeń ubezpieczeniowych. System ten jest obecnie rozpowszechniony w krajach całej UE. Niestety coraz częściej pojawiają się głosy, iż jego efektywność nie zawsze kształtuje się na zadowalającym poziomie.*

Do oceny taryfikacyjnej efektywności systemu najczęściej znajdują zastosowanie: teoria łańcuchów Markowa oraz ujemny model dwumianowy. Narzędzia te pozwalają w przybliżonym stopniu określić poziom dopasowania składki ubezpieczeniowej do ubezpieczanego ryzyka komunikacyjnego.

Celem artykułu będzie krótkie przybliżenie tych metod oraz wskazanie kluczowych obszarów funkcjonowania systemu, które podlegają w nich ocenie.

Słowa kluczowe: ubezpieczenia komunikacyjne, system *bonus-malus*, procesy Markowa, składka ubezpieczeniowa, szkodowość.

Wprowadzenie

Systemy *bonus-malus*, kojarzone głównie z ubezpieczeniami komunikacyjnymi, służą przede wszystkim różnicowaniu składki ubezpieczeniowej dla klientów o różnej historii szkód w przeszłości. Rozpowszechnione są w całej UE, jednak zastosowane rozwiązania są zróżnicowane: od systemów kształtowanych dowolnie przez zakłady ubezpieczeń, do systemów ujednoliconych, narzuconych przez ustawodawców. Nazwa systemów (z łac. „dobry-zły") wiąże się z ideą nagradzania zniżką składki za bezszkodową historię ubezpieczenia (*bonus*) i karania zwyżką składki za występujące w poprzednich okresach ubezpieczenia szkody (*malus*). Ubezpieczeni są przydzielani do klas o różnej wysokości składek, w zależności od liczby zgłoszonych w poprzednim okresie szkód oraz klasy, w jakiej znajdowali się w poprzednim okresie.

Do najważniejszych funkcji systemów *bonus-malus* należą:

- **funkcja taryfikacyjna** – zróżnicowanie składek dla nisko- i wysokoszkodowych klientów – dopasowanie składki do indywidualnego ryzyka;
- **funkcja prewencyjna** – oddziaływanie na szkodowość poprzez zachęcanie ubezpieczonych do unikania szkód;
- **funkcja marketingowa** – duże ulgi w wysokości składek są atrakcyjne dla klientów, stanowią istotny element podnoszący atrakcyjność oferty ubezpieczyciela.

Systemy *bonus-malus* są charakterystyczne dla rynku ubezpieczeń komunikacyjnych, przede wszystkim obowiązkowego OC. W wielu krajach, w tym także w Polsce, stosuje się je również przy ubezpieczeniu autocasco. Pomimo tego, że jako jedną z funkcji systemu *bonus-malus* wymienia się funkcję prewencyjną, należy dopowiedzieć, iż w przypadku ubezpieczeń AC ma ona ograniczone zastosowanie. Trudno bowiem mówić o prewencji w przypadku takich szkód, na których zaistnienie właściciel pojazdu nie ma wpływu, np. kradzież, szkoda będąca wynikiem działania sił natury czy działania osób trzecich – poza zachowaniem należytej staranności w zabezpieczeniu pojazdu ubezpieczony nie może w żaden sposób wpływać na częstość występowania szkód. Karanie zwyżką składki w takich przypadkach wydaje się nieuzasadnione i nielojalne wobec ubezpieczonego. Ponadto pojawia się odwrotne wręcz działanie – zatajanie zaistniałych szkód celem zachowania zniżek, zatem zafałszowywanie statystyk i fikcyjne obniżanie szkodowości (efekt zwany w literaturze *hunger of bonus*). Niektóre zakłady ubezpieczeń podjęły również próbę wprowadzenia systemu *bonus-malus* w ubezpieczeniach mieszkań[1], choć również tu pojawiają się podobne problemu jak w przypadku autocasco.

Pierwszy system *bonus-malus* był wprowadzony w Belgii. Tamtejszy rząd już w 1956 r. wprowadził obowiązkowe ubezpieczenie OC kierowców, ale system zaczął funkcjonować w 1961 r. Piętnaście lat po wprowadzeniu obowiązku posiadania polisy OC na zakłady ubezpieczeń nałożony został obowiązek stosowania przy taryfikacji reguł systemu *bonus-malus*. Wytyczne te regulowały sposób naliczania i wysokość składek ubezpieczeniowych.

Przykład belgijskiego systemu *bonus-malus* prowadzi do kolejnej funkcji systemu, tj. do funkcji marketingowej. Duża ulga w cenie ubezpieczenia jest bardzo atrakcyjna dla klientów. W 1961 r. niewielka firma ubezpieczeniowa[2] wprowadziła system zniżek i zwyżek dla swoich klientów, choć nie było to obowiązkowe. Firma ta dzięki owej decyzji zwiększyła swoje udziały w rynku od 2 do 5 proc. Zainicjowanie systemu pomogło jej wprowadzić do swojego portfela klientów, głównie dobrych i niskoszkodowych kierowców. Decyzja klientów była podjęta przez nich pomimo tego, iż składka wejściowa była dla nich o 20 proc. wyższa, niż gdyby kupowali ubezpieczenie OC poza systemem *bonus-malus*.

Obecnie systemy *bonus-malus* stosuje się w wielu krajach, jednak podejście do ich formy jest bardzo różne. W części krajów systemy te kształtowane są całkowicie dowolnie przez zakłady ubezpieczeń, w innych są częściowo regulowane przez ustawodawcę, aż do systemów całkowicie uregulowanych prawnie, identycznych dla wszystkich ubezpieczycieli (np. do 2002 roku system belgijski).W Polsce, do 1 stycznia 2004 r., obowiązywały przepisy, które ustalały maksymalną zniżkę na poziomie 60 proc., a zwyżkę – na 160 proc., oraz stanowiły, że za każdy bezszkodowy

1. Przykładem polskiego ubezpieczyciela stosującego system *bonus-malus* w ubezpieczeniach domu/mieszkania jest TUiR Alianz.
2. J. Lemaire, *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Boston: Kluwer, 1995, s. 11.

okres 24 miesięcy system powinien gwarantować wzrost zniżki o co najmniej 10 p.p. Po wprowadzeniu nowelizacji Ustawy o działalności ubezpieczeniowej ograniczenia te przestały obowiązywać, tym niemniej praktyka rynkowa i zachowanie ubezpieczycieli sprawiły, że limity się utrzymały.[3]

System zniżek i zwyżek funkcjonuje nie tylko w Europie, ale też w Azji i niektórych państwach afrykańskich i latynoamerykańskich. Natomiast w krajach Ameryki Północnej system *bonus-malus* jest rzadziej stosowany z powodu specyficznego podejścia do taryfikacji *a posteriori.*[4] Według niektórych autorów[5] systemy taryfikacji *a posteriori* z jednej strony pozwalają na ujęcie czynników trudnych do kwantyfikacji, jednak z drugiej strony stanowią zaprzeczenie idei ubezpieczenia, gdzie w zamian za pewną składkę ubezpieczyciel przejmuje ryzyko, na jakie narażony jest ubezpieczony. Przy zastosowaniu systemów *bonus-malus* składka również staje się losowa, zależna od historii szkód. Drugim argumentem przeciw systemom *bonus-malus* jest to, że ich stosowanie zaprzecza zasadzie solidarności ubezpieczonych (ubezpieczeni, którzy w danym okresie nie spowodowali szkód, pomagają tym, u których szkody wystąpiły).

Należy podkreślić, iż systemy *bonus-malus* w poszczególnych krajach mocno się od siebie różnią. Zależnie od regulującego je prawodawstwa są obowiązkowe (wtedy konkurencja produktowa jest ograniczona, pozostaje jedynie konkurencja cenowa) bądź dowolne (i wtedy pojawiają się dodatkowe obszary konkurencji). Niektóre kraje przyjęły bardzo prosty system *bonus-malus*. Przykładowo w Brazylii jest podział polis tylko na siedem klas, a poziom premii 100, 90, 85, 80, 75, 70 i 65. Nowy ubezpieczający zaczyna w klasie 7, na poziomie 100. Każde zgłoszenie szkody przenosi go o jedną klasę „w górę", do niższej zniżki.

1. Konstrukcja systemów *bonus-malus*

System *bonus-malus* jest jednym ze stosowanych sposobów wyceny ubezpieczeń (*insurance pricing methods, insurance rating methods*) w zależności od ryzyka ponoszonego przez zakłady ubezpieczeń, w związku ze zróżnicowanym poziomem szkodowości poszczególnych klientów. Wśród sposobów wyceny najczęściej wymienianych w literaturze[6] można wskazać:

- wycenę indywidualną, gdzie składka dla każdego ubezpieczonego jest ustalana indywidualnie, na podstawie osądu dokonanego przez przedstawiciela ubezpieczyciela (metoda stosowana głównie tam, gdzie dane statystyczne dotyczące szkodowości są niewystarczające, zatem nie dotyczy to sytuacji ubezpieczeń komunikacyjnych),
- podział na klasy taryfowe i inne (*schedule rating*, *experience rating*, *retrospective rating*). Podział na klasy taryfowe dokonywany jest na podstawie czynników wyodrębnionych jako istotnie

3. Jedynie zakład ubezpieczeń Proama oferuje zniżkę na poziomie 70 proc. Pozostałe oferty ubezpieczycieli sięgają poziomu 60 proc. zniżki.

4. Por. *Automobile insurance and road accident prevention: report prepared by an OECD scientific expert group*, Organisation for Economic Co-operation and Development, Paris 1990, s. 46, za: B. Kochański, *Efektywność funkcjonowania systemu* bonus-malus *w ubezpieczeniach komunikacyjnych w Polsce i w wybranych krajach europejskich*, praca magisterska napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Mirosława Szredera, Uniwersytet Gdański 2000.

5. Szerzej w J. Lemaire, *Bonus*…, op. cit.

6. Szerzej w B. Kochański, *Efektywność*…, op. cit. oraz E. J. Vaughan, *Fundamentals of risk and insurance*, John Wiley and sons, 1992.

wpływające na poziom szkodowości. W ubezpieczeniach komunikacyjnych są to najczęściej czynniki, które można podzielić na: dotyczące kierowcy, dotyczące pojazdu, cel użytkowania pojazdu, osoby upoważnione do użytkowania pojazdu.

Pozostają jednak czynniki, które trudno wykorzystać w klasyfikacji, takie jak np. indywidualne cechy kierowcy (np. refleks, skłonność do brawury itp.), których nie można wziąć pod uwagę *a priori*. Zatem przydatny jest również podział uwzględniający dotychczasowy przebieg ubezpieczenia. Służą temu metody „nakładane" na ustalone wcześniej grupy taryfikacyjne uzależniające ostateczną wysokość składki od tego, na ile dotychczasowy przebieg szkodowości różnił się od przeciętnego w danej grupie. Systemy *bonus-malus* wyróżniają się wśród tych metod przejrzystością i przystępnością dla przeciętnego klienta. Zatem systemy te są systemami klasyfikacji ubezpieczonych w zależności od indywidualnej historii szkodowości, są więc systemami *a posteriori.*[7]

Proces ustalania składki dla każdego klienta przebiega w systemie *bonus-malus* w sposób następujący:

1. klienci są wstępnie klasyfikowani na podstawie czynników *a priori*, ustalana jest dla nich wysokość składki podstawowej,
2. następnie ustala się, w jakiej klasie taryfowej powinien znaleźć się dany klient, na podstawie tego, w jakiej klasie znajdował się w poprzednim okresie ubezpieczenia, oraz liczby szkód jakie zostały zgłoszone z jego ubezpieczenia w minionym okresie (w przypadku braku szkód klient przechodzi do klasy następnej, w przypadku zgłoszenia szkód cofa się według ustalonego algorytmu do jednej z klas poprzednich),
3. każdej klasie przypisany jest odpowiedni współczynnik (stawka, poziom składki), określający, jaki procent składki podstawowej powinien płacić klient, w przypadku klas zniżkowych jest to współczynnik mniejszy od 1, dla klas zwyżkowych większy od 1 (lub 100 proc., gdyż przyjęło się wyrażać te współczynniki jako procent składki podstawowej),
4. współczynnik ten wykorzystywany jest do korygowania ustalonej wcześniej na podstawie czynników *a priori* składki podstawowej (ostateczna składka to iloczyn współczynnika i składki podstawowej.

Aby w pełni scharakteryzować system *bonus-malus*, konieczna jest znajomość jego kluczowych elementów:

- **klas taryfowych** (wygodne jest rozróżnienie klas zwyżkowych i zniżkowych) C_i, gdzie i = 1,…, s oznacza klasę o numerze i, s oznacza liczbę klas;
- **klasy początkowej**, do której trafia nowy klient bez historii szkodowości C_{i0};
- wartości współczynników w poszczególnych klasach określających procent składki podstawowej płaconej przez klienta (czasem opisywany jako procent zniżki lub zwyżki udzielanej klientowi); w sposób syntetyczny opisuje te wartości **wektor stawek**: $b = (b_1, \ldots, b_s)$;
- **algorytmu przemieszczania** się z klasy do klasy w zależności od liczby szkód w poprzednim okresie – algorytm ten można określić:
  - **opisowo**,

7. Określenia *bonus* oraz *malus* nie dotyczą wyłącznie klas taryfikacyjnych, lecz są stosowane również jako synonimy zwyżki oraz zniżki.

– **za pomocą tabeli** (dla większej przejrzystości) np.

Tabela 1. Przykładowe reguły przejścia dla fikcyjnego systemu *bonus-malus*

Klasa	Stawka (w %)	Wpływ liczby szkód na zmianę klasy	
		0	1 i więcej
1	200	2	1
2	100	3	1
3	90	4	2
4	80	5	3
5	70	5	4

Źródło: opracowanie własne.

Ta forma jest wygodna do analizy dla klienta. W wierszach charakteryzowane są poszczególne klasy taryfowe. W pierwszej kolumnie znajduje się numer klasy, w drugiej stawka taryfowa, a kolejne kolumny zawierają informacje o tym, w której klasie znajdzie się w kolejnym roku klient, który w poprzednim roku był w klasie o numerze i oraz zgłosił 0, 1, 2 lub więcej szkód.

– **za pomocą macierzy przejścia z klasy do klasy** – ta forma jest wygodna w przypadku analizy systemów. Aby skonstruować macierze przejścia, najpierw definiuje się funkcję transformacji: $T_k(i)=j$ oznacza, że kierowca przechodzi z klasy i do klasy j, gdy spowodował k wypadków w ciągu jednego okresu ubezpieczenia. Następnie konstruuje się macierze T_k odzwierciedlające to, co dzieje się z danym klientem w przypadku zgłoszenia przez niego k szkód. Elementami macierzy są zera, w przypadku gdy klient nie przechodzi z klasy i do j, oraz 1, gdy następuje przejście, czyli

$$T_k = \left(t_{ij}^{(k)}\right), \textbf{ gdzie } t_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \textit{gdy następuje przejście} \\ 0 & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}. \qquad (1)$$

Dla podanego przykładu:

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T_1 = T_2 = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Natomiast wektor stawek b = $[2 \quad 1 \quad 0{,}9 \quad 0{,}8 \quad 0{,}7]$.

W dalszej części opracowania stosowane będą powyższe oznaczenia. Do analizy systemów i konstrukcji miar oceny systemów wykorzystywane będą algorytmy przejścia z klasy do klasy zapisane w formie macierzy przejścia.

2. Przegląd klasycznych miar prezentowanych w literaturze

Przy analizie systemów *bonus-malus* podstawową kwestią jest określenie prawdopodobieństwa pojawienia się *k* szkód[8] w ciągu roku dla pojedynczego ubezpieczonego. Do aproksymacji rozkładu liczby roszczeń (zmiennej losowej *K*) często wykorzystuje się rozkład Poissona w postaci:

$$p_k = P(K=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{2}$$

gdzie λ to współczynnik szkodowości.

Wartość oczekiwana $$E(k) = \lambda, \tag{3}$$

wariancja $$V(k) = \lambda. \tag{4}$$

Model ten jest w literaturze aktuarialnej często stosowany, jest on również uzasadniony merytorycznie w odniesieniu do pojedynczego ubezpieczonego.[9]

W odniesieniu do portfeli ubezpieczonych, przede wszystkim tam, gdzie założenie o homogeniczności portfeli nie jest spełnione, stosowany jest model oparty na rozkładzie ujemnym dwumianowym[10]. Jeżeli mamy do czynienia z portfelem niejednorodnym, zakłada się, że dla pojedynczego ubezpieczonego rozkład liczby szkód jest zmienną losową o rozkładzie Poissona. Parametr ten jest jednak inny dla różnych ubezpieczonych – jest realizacją zmiennej losowej Λ. Jeżeli parametr intensywności szkód λ jest zmienną losową o rozkładzie gamma z parametrami α i β[11], wówczas liczba szkód ma rozkład ujemny dwumianowy w postaci:

$$P(K=k) = \binom{\alpha+k-1}{k}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{k}, k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

---

8. Systemy *bonus-malus* w większości krajów oparte są na liczbie szkód zgłoszonych w poprzednim okresie. Jedynym krajem, w którym system ten opiera się na wartości szkód, jest Korea Południowa, gdzie szkody majątkowe są podzielone na dwie klasy, zależnie od ich wysokości, natomiast szkody osobowe podzielono aż na 14 klas (za Lemaire 1998), jednak wydaje się, że analiza dla tego systemu może być prowadzona w analogiczny sposób, z wyjątkiem zmiany na rozkład zawierający prawdopodobieństwa wystąpienia szkody o określonej wysokości (właściwie z określonego przedziału wartości).
9. Za C.D. Daykin, T. Pentikänen, H. Pesonen, *Practical risk theory for actuaries*, Chapman&Hall, London 1994.
10. Zastosowanie tego modelu wskazywane jest między innymi w: G. Coene, L.G. Doray, *A financially balanced* bonus-malus *system*, „Astin Bulletin" 26, 1996, s. 107–116, M. Fisz, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN Warszawa 1967, s. 180.
11. Estymatory parametrów α i β wyznaczone metodą momentów: $\tilde{\beta} = \frac{\overline{k}}{S_k^2 - \overline{k}}$ i $\tilde{\alpha} = \frac{\overline{k}^2}{S_k^2 - \overline{k}}$, gdzie $\overline{k}$ to średnia liczba szkód w portfelu, S_k^2 to wariancja liczby szkód w portfelu – za A. Szymańska. W analizie przyjmuje się założone z góry wartości parametru λ w rozkładzie Poissona oraz α i β w ujemnym dwumianowym, najbardziej pożądane jest zatem, aby parametry te były wyznaczane z podstawie danych szkodowych z kraju, dla którego prowadzona jest analiza. Pojawia się jednak problem dostępności danych służących takim wyliczeniom, najczęściej więc przyjmowane są λ=0,1 (wartość ta jest zbliżona do przeciętnej częstości szkód w krajach europejskich) bądź wartość 0,0552 (wyliczona i podana w roku 2010 przez UFG w raporcie: Ubezpieczenia komunikacyjne w latach 2005–2009. Wspólny Raport Urzędu Komisji Nadzoru Finansowego (KNF) i Ubezpieczeniowego Funduszu Gwarancyjnego (UFG), oraz α=16,1384 i β=1,6131 (wartości przyjęte za wyliczeniami dla jednego z belgijskich zakładów ubezpieczeń) por. Lemaire*,* 1995, s. 123.

Jego wartość oczekiwana: $$E(K)=\frac{\alpha}{\beta},\tag{6}$$

wariancja: $$V(K)=\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right).\tag{7}$$

Podczas przedstawiania kolejnych miar wykorzystywanych w analizie systemów *bonus-malus* przyjmiemy założenie upraszczające, że liczba szkód ma rozkład Poissona z parametrem λ.

2.1. Miary oparte na teorii procesów Markowa

W rozważaniach teoretycznych do analizy systemu *bonus-malus* wykorzystuje się teorię procesów Markowa. Proces przesuwania ubezpieczonego z klasy do klasy zgodnie ze zdefiniowanym systemem, jest jednorodnym łańcuchem Markowa o skończonej liczbie stanów (za „stan" przyjęta jest klasa, w której znajduje się ubezpieczony)[12].

Na podstawie przedstawionych macierzy wylicza się również prawdopodobieństwa przejścia z klasy C_i do klasy C_j w ciągu jednego okresu:

$$p_{ij}(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\lambda)t_{ij}^{(k)},\tag{8}$$

gdzie $p_k(\lambda)$ oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia k szkód.

Macierz przejścia zawiera prawdopodobieństwa przejścia z klasy do klasy z roku na rok, czyli w syntetyczny sposób przedstawia algorytm zmiany klas:

$$M(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k(\lambda)T_k=\begin{bmatrix} p_{11}(\lambda) & \cdots & p_{1s}(\lambda) \\ & \vdots & \\ p_{s1}(\lambda) & \cdots & p_{ss}(\lambda)\end{bmatrix},\tag{9}$$

gdzie $\sum_{j=1}^{s}p_{ij}(\lambda)=1$ i $p_{ij}(\lambda)\geq 0$.

Czyli i-ty wiersz macierzy zawiera prawdopodobieństwa przejścia ubezpieczonego z klasy *i* do każdej z klas taryfowych. Zatem macierz prawdopodobieństw przejścia w syntetyczny sposób prezentuje działanie systemu, może więc być jego modelem.

12. Warto zaznaczyć, że nie wszystkie systemy *bonus-malus* są procesami Markowa. W niektórych systemach, np. belgijskim, wprowadzane są dodatkowe reguły, które powodują, że w pierwotnej formie proces przejść między klasami nie zależy tylko od położenia ubezpieczonego i liczby szkód w poprzednim okresie. W systemie belgijskim wprowadzono regułę, która określa, że jeżeli ubezpieczony ma 4 kolejne lata bezszkodowe, to niezależnie od tego, jaką zwyżkę płaci w poprzednim okresie, w kolejnym nie może znajdować się w klasie o wyższym współczynniku niż klasa 14 (klasa w składce = 100% składki podstawowej). Z takiego systemu jak belgijski konieczne jest zatem „przetworzenie" go do formuły, w której będzie on procesem Markowa, poprzez sztuczne dodanie klas, np. 18.0 (klasa 18 i 0 lat bezszkodowych), 18.1 (klasa 18 i jeden rok bezszkodowy bezpośrednio przed analizowanym okresem), 18.2 (klasa 18 i dwa kolejne lata bezszkodowe bezpośrednio poprzedzające analizowany okres, i 18.3 (klasa 18 i 3 kolejne lata bezszkodowe) (za Lemaire 1998).

Dla podanego przykładu:

$$M(\lambda)=\begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & q & p \end{bmatrix},$$

gdzie $p=p_0(\lambda)$, natomiast $q=p_1(\lambda)+p_2(\lambda)+\ldots=1-p$.

2.1.1. Miary oparte na rozkładzie stacjonarnym

Kilka miar efektywności systemów *bonus-malus* opartych jest na rozkładzie stacjonarnym procesu. Wśród ich wad można wymienić to, że opierają się na modelach, których założenia nie zawsze spełnione są w rzeczywistości, między innymi nie uwzględniają zmiany częstości szkód (parametru λ) w czasie (zmiany te wiążą się ze wzrostem doświadczenia kierowcy, zmianą samochodu na nowszy, bezpieczniejszy, wzrostem liczby kilometrów pokonywanych w ciągu roku itp.). Ponadto dla niektórych systemów *bonus-malus* stan stacjonarny nie jest osiągany albo okres dochodzenia do rozkładu wystarczająco zbliżonego do rozkładu stacjonarnego jest bardzo długi. Zalety to natomiast przede wszystkim prosta i zrozumiała konstrukcja.

Dla rozkładu stacjonarnego można obliczyć wektor zawierający prawdopodobieństwa znalezienia się w każdej z klas taryfowych w długim horyzoncie czasowym (po osiągnięciu stanu stacjonarnego) $a(\lambda)=\left[a_1(\lambda),\ldots,a_s(\lambda)\right]$. Elementy wektora $\overline{a}(\lambda)$ można interpretować jako prawdopodobieństwa znalezienia się w długim horyzoncie czasowym w danej klasie bądź też jako frakcję czasu pozostawania klienta w danej klasie taryfowej.

Dla rozkładu stacjonarnego warto obliczyć wektor zawierający prawdopodobieństwa znalezienia się w każdej z klas taryfowych w długim horyzoncie czasowym (po osiągnięciu przez proces stanu stacjonarnego):

$$a(\lambda)=\left[a_1(\lambda),\ldots,a_s(\lambda)\right], \tag{10}$$

gdzie $a_i(\lambda)$ oznacza prawdopodobieństwo przynależności do i-tej klasy w długim horyzoncie czasowym, natomiast $\sum_{i=1}^{s} a_i(\lambda)=1$[13].

Przy założeniu rozkładu Poissona dla liczby szkód wektor $a(\lambda)$ można wyznaczyć jako lewostronny wektor własny macierzy $M(\lambda)$ odpowiadający wartości własnej równej 1[14], w innych przypadkach możliwe jest wyznaczenie go numerycznie lub za pomocą symulacji.

Wektor $\overline{a}(\lambda)$ można otrzymać rekurencyjnie, poprzez obliczenie prawdopodobieństwa znalezienia się w poszczególnych klasach w kolejnych latach funkcjonowania systemu, czyli wektory $\overline{a}(n,\lambda)$. Do tych obliczeń wystarczająca jest znajomość klasy początkowej oraz macierzy przejścia. Wektor $\overline{a}(1,\lambda)$ w pierwszym roku funkcjonowania ubezpieczonego w systemie to wektor zawierający zera poza klasą wstępu, dla:

13. J. Lamaire, *Bonus*…, op. cit.
14. B. Kochański, *Efektywność*…, op. cit.

$$\overline{a}(n;\lambda)=\overline{a}(n-1;\lambda)M(\lambda). \tag{11}$$

Wektor $\overline{a}(\lambda)$ można otrzymać jako graniczną wartość wektorów $\overline{a}(n,\lambda)$, gdy $n \to \infty$.

Elementy wektora $\overline{a}(\lambda)$ można interpretować jako prawdopodobieństwa znalezienia się w długim horyzoncie czasowym w danej klasie bądź też jako frakcję czasu pozostawania klienta w danej klasie taryfowej.

- **Średnia asymptotyczna składka (stacjonarny przeciętny poziom składki)**

Pierwszą miarą, która może służyć analizie systemów *bonus-malus,* jest średnia asymptotyczna składka ($B(\lambda)$), czyli przeciętna składka, jaką w długim horyzoncie czasowym (po osiągnięciu przez system stacjonarności) płaci klient o ustalonym poziomie szkodowości. Średnia asymptotyczna składka wyrażona jest wzorem:

$$B(\lambda)=\sum_{i=1}^{s} a_i(\lambda)\cdot b_i, \tag{12}$$

gdzie b_i oznacza składkę w i-tej klasie.

Jest zatem średnią ważoną przeciętnych indywidualnych składek stacjonarnych.

Miara ta może służyć także do analizy pojedynczego systemu:

- jeżeli $B(\lambda)=\lambda$, system składek uważa się za uczciwy,
- jeżeli $B(\lambda)>\lambda$, składki są zawyżone,
- gdy $B(\lambda)<\lambda$, zaniżone.

Może również służyć do porównywaniu systemów między sobą – system z wyższym poziomem $B(\lambda)$ będzie przynosił wyższy oczekiwany zysk z pojedynczego ubezpieczenia, będzie jednak „droższy" dla klienta.

Przy ustalaniu średniego stacjonarnego poziomu składki można wskazać klasę, w której znajdzie się klient, w chwili gdy system *bonus-malus* osiągnie poziom stacjonarności.

Miara ta, jeżeli ma służyć porównywaniu systemów, powinna być analizowana z uwzględnieniem tego, że wartość składki podstawowej w różnych systemach może się różnić, zatem wyznaczenie średniej stacjonarnej składki jako procentu składki podstawowej nie określa jeszcze, który system jest „tańszy", a który „droższy". Ponadto należy pamiętać, że za 100 proc. składki podstawowej może być przyjęty dowolny poziom, niekoniecznie składka płacona przez ubezpieczonych w klasie wstępu (klient „na wejściu" do systemu może płacić np. składkę podwyższoną). Na dodatek, w związku z honorowaniem zniżek wypracowanych przez ubezpieczonych u innych ubezpieczycieli, klasa wstępu dotyczy tylko ubezpieczonych bez żadnej historii szkodowości.

Dalej, posługując się wartościami oczekiwanymi stacjonarnego poziomu składki, można ustalić, jak silna jest tendencja przesuwania ubezpieczonych do klas o najniższej składce. Zatem są to miary równowagi (odpowiednio: nierównowagi) systemu.

- **Względny stacjonarny przeciętny poziom składki (RSAL – Relative Stationary Average Level)**

RSAL oblicza się za pomocą wzoru:

$$RSAL(\lambda)=\frac{\left(B(\lambda)-\min_i(b_i)\right)}{\left(\max_i(b_i)-\min_i(b_i)\right)}. \tag{13}$$

Miara ta przyjmuje wartości z przedziału [0;1], gdzie najniższej możliwej składce przyporządkowuje się wartość 0, a najwyższej 1. Wskaźnik ten określa pozycję w systemie przeciętnego ubezpieczonego o poziomie szkodowości λ w długim okresie (po osiągnięciu przez system stanu stacjonarnego). Określa zatem nie to, jaki procent składki podstawowej płaci przeciętny klient, ale gdzie na skali rozpiętości całego systemu się on znajduje.

Trudno podać optymalną wartość tej miary, wg twórcy miary powinna ona oscylować wokół 0,5, jednak przykłady niektórych systemów *bonus-malus* wskazują, że nie jest to w praktyce możliwe[15]. Niskie wartości tej miary mogą wskazywać na silną tendencję do skupiania się ubezpieczonych w klasach o dużych zniżkach, natomiast wysokie wartości mogą wskazywać na lepsze rozłożenie ubezpieczeń w poszczególnych klasach.[16]

Jedną z wad miernika jest to, że na wysokość RSAL bardzo duży wpływ ma wysokość maksymalnej zwyżki w systemie, ustalanej w dużej mierze w taki sposób, aby była dotkliwa dla bardzo szkodowych klientów[17], ponadto w niektórych systemach (np. norweski) w ogóle nie określa się maksymalnej zwyżki, co powoduje, że RSAL nie może być wyznaczony. Ze względu na ostatnią uwagę wprowadza się modyfikację RSAL, która powoduje, że miara jest niemożliwa do obliczenia tylko dla systemów, w których klasą startową jest klasa najniższa[18].

Modyfikacja RSAL:

$$RSAL_2(\lambda)=\frac{\left(B(\lambda)-\min_i(b_i)\right)}{\left(b_{i0}-\min_i(b_i)\right)}, \tag{14}$$

gdzie b_{i0} to składka początkowa.

Po takiej modyfikacji miara jest niemożliwa do obliczenia tylko dla tych systemów, w których klasą startową jest klasa najniższa (takie systemy w praktyce nie występują). Optymalną wartością tej miary jest 1, wówczas taki system można nazwać zrównoważonym finansowo.[19]

Miarę RSAL można również zmodyfikować tak, aby obliczyć ją nie tylko dla pojedynczego ubezpieczonego, ale również dla całego portfela, niekoniecznie homogenicznego.

- **Współczynnik zmienności składek**

Współczynnik zmienności składek po n okresach funkcjonowania systemu można wyrazić następująco:

$$V(n;\lambda)=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{s}\left(b_i-B(n;\lambda)\right)^2 a_i(\lambda)}}{B(n;\lambda)}, \tag{15}$$

gdzie $B(n;\lambda)$ jest przeciętną składką po n latach funkcjonowania systemu.

15. Szerzej w J. Lemaire, *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Boston: Kluwer, 1995 oraz B. Kochański, *Efektywność* …, op. cit.
16. Szerzej w B. Kochański, *Efektywność* …, op. cit.
17. W Polsce wg ustawy o ub. obowiązkowych zakład ubezpieczeń nie może odmówić zawarcia umowy ubezpieczenia obowiązkowego, jeżeli w ramach swojej działalności prowadzi działalność obejmującą te ubezpieczenia – jedynym sposobem „pozbycia się" bardzo szkodowego klienta jest zniechęcenie go bardzo wysoką składką.
18. Takie systemy w praktyce nie występują.
19. Za B. Kochański, *Efektywność* …, op. cit.

Współczynnik zmienności składek mierzy stopień zróżnicowania składek płaconych przez ubezpieczonych, czyli może być miernikiem solidarności lub jej braku między ubezpieczonymi – im większa wariancja, tym poziom solidarności mniejszy. Przy braku ubezpieczenia współczynnik zmienności strat, na jakie narażony jest ubezpieczony, równy jest współczynnikowi zmienności szkód, jakie mogą wystąpić. W przypadku ubezpieczenia i braku zróżnicowania składek współczynnik zmienności płatności dokonywanych przez ubezpieczonego wynosi 0. W przypadku systemów *bonus-malus* jest to wartość pomiędzy tymi skrajnościami.

Pomocna może być zarówno zmian wartości współczynnika zmienności w czasie dla zadanego poziomu λ (np. typowego, czyli równego 0,1). Zwykle współczynnik zmienności w pierwszym roku wynosi zero, wzrasta do momentu osiągnięcia maksymalnej zniżki, a następnie spada do momentu osiągnięcia stacjonarności. Innym zestawieniem wartym analizy jest zależność współczynnika zmienności od poziomu parametru λ, co może służyć jako narzędzie porównywania systemów między sobą.[20]

- **miara łącznej zmienności systemu**[21]

Jest to suma odchyleń od wektora stacjonarnego po n okresach funkcjonowania systemu, czyli:

$$\left(TV\right)_n = \sum_{j=1}^{s} \left| p_{ij}^{n}\left(\lambda\right) - a_j\left(\lambda\right) \right|, \tag{16}$$

gdzie $p_{ij}^{n}\left(\lambda\right)$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia z klasy C_i do klasy C_j po dokładnie n okresach funkcjonowania systemu.

TV mierzy, jak szybko system staje się zbliżony do stacjonarnego oraz na ile się od swego docelowego stanu różni po *n* latach funkcjonowania. Może to być miara wrażliwości systemu na występujące szkody i przesunięcia z klasy do klasy.

Pozostaje dyskusyjne, jakie są pożądane wartości tej miary. Z jednej strony system powinien mocno reagować na wystąpienie szkód, z drugiej przy zbyt dużej wrażliwości system umieszcza ubezpieczonych w odpowiednich dla nich klasach dopiero po bardzo długim czasie, co wydaje się sprzeczne z ideą systemu. Jeżeli system dopiero po 30 latach umieszcza ubezpieczonych o danym poziomie szkodowości w odpowiednich dla nich klasach, to oznacza, że przez ponad połowę przeciętnego czasu „bycia kierowcą" ubezpieczony nie jest dobrze klasyfikowany, ponadto żaden z systemów *bonus-malus* nie funkcjonuje w niezmienionej formie aż tak długo, zatem zbyt „wrażliwe" systemy nie mogą w realiach rynkowych dobrze spełniać swej funkcji taryfikacyjnej. Przeważnie systemy mało rozbudowane, o niewielu klasach stabilizują się szybko, te bardziej złożone znacznie wolniej. W literaturze[22] można znaleźć wyniki obliczeń dokonanych dla systemów działających w różnych krajach. Dla systemów prostych miara *TV* przyjmuje małe wartości już po kliku latach funkcjonowania ich (np. system funkcjonujący na Tajwanie już po 3 latach osiąga bardzo niskie wartości *TV* dla λ=0,1), dla systemów bardziej złożonych, z wieloma klasami oraz złożonymi regułami przejścia, wskaźnik ten przyjmuje wysokie wartości nawet po 30 latach ich funkcjonowania

20. Za J. Lemaire, Bonus-Malus *systems: the European and Asian approach to merit rating*, „North American Actuarial Journal Society of Acutaries" – Schaumburg, Illinois, 1998: 2:1, 26–47.
21. Za H. Bonsdorff, 1992, *On the Convergence Rate of Bonus-Malus Systems*, „ASTIN Bulletin" 22:217–223. (1992) – por. J. Lemaire, *Bonus…*, 1995, op. cit.
22. J. Lemaire, *Bonus…*, 1998, op. cit.

(dla przykładu system belgijski dla λ=0,1 po 30 latach ma wartości na poziomie 20 proc. wartości początkowych i nawet po 60 latach nie stabilizuje się).

Wskaźnik ten może być wykorzystywany do analizy wpływu modyfikacji dokonywanych w konstrukcji systemu[23] na tempo jego stabilizowania się.

- **Efektywność ogólna – elastyczność średniej składki względem poziomu ryzyka**

Elastyczność systemu jest miarą reakcji systemu na zmianę częstości szkód. Pozwala określić, w jakim stopniu kierowcy o różnym poziomie ryzyka są oceniani przez system. Elastyczność systemu definiowana jest jako:

$$\eta(\lambda)=\frac{\frac{dB(\lambda)}{B(\lambda)}}{\frac{d\lambda}{\lambda}}=\frac{B'(\lambda)}{B(\lambda)}\cdot\lambda. \tag{17}$$

W dobrze skonstruowanym systemie *bonus-malus* wysokość składki powinna być rosnącą funkcją szkodowości, w idealnym przypadku powinna być to funkcja liniowa, czyli $\eta(\lambda)=1$, co oznacza, że ze wzrostem względnego ryzyka wystąpienia szkody o jedną jednostkę (np. jeden punkt procentowy), względny przyrost składki powinien być taki sam, np. jeżeli jeden klient charakteryzuje się wskaźnikiem częstości szkód równym 0,1, natomiast inny 0,11, to drugi z klientów powinien płacić składkę wyższą o 10 proc. W większości funkcjonujących na świecie systemów *bonus-malus* elastyczność jest jednak <1[24].

W literaturze znaleźć można badania wskazujące na to, że na wysokość miary efektywności bardzo duży wpływ ma wysokość maksymalnych zwyżek w systemie, co może jednak działać odstraszająco na klientów.

Wśród wad tej miary najważniejszą jest brak uwzględnienia struktury portfela. Z tego względu wprowadzana bywa miara opisana niżej.

- **Łączna elastyczność (*total elasticity*)**[25]

Miarę tę można wyznaczyć, gdy znana jest funkcja struktury szkodowości w portfelu, a dokładniej funkcja opisująca rozkład zmiennej losowej określającej częstość szkód, czyli funkcja gęstości parametru λ. Jeżeli zmienna ta może być scharakteryzowana przez funkcję $g(\lambda)$, wówczas łączna elastyczność portfela wyraża się wzorem:

$$\eta=\int_0^\infty \eta(\lambda)g(\lambda)d\lambda\,. \tag{18}$$

Jest ona łączną wartością elastyczności systemu przy zadanej strukturze portfela, zależy więc od tego, jak wielu „dobrych" i „złych" klientów ma ubezpieczyciel. Zatem interpretacja i zastosowanie miary jest podobne do miary poprzedniej.

23. Np. zmiany takich elementów jak: liczba klas, klasa startowa, zasady przejścia (np. czy uzależniać zmianę klasy od jednej szkody, czy rozwijać system do zależności od pięciu szkód).
24. Za A. Szymańska, *Wybrane miary efektywności systemów* bonus-malus *ubezpieczeń komunikacyjnych OC*, w: *Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 1127, 2008, s. 428–435
25. B. Kochański, *Efektywność…*, op. cit.

- **Efektywność zależna od klasy startowej**[26]

  Pozwala ocenić, jak szybko kierowcy trafiają do klas odpowiadających poziomowi ryzyka, który reprezentują. Jest to funkcja:

$$\mu(\lambda)=\frac{v'_i(\lambda)}{v_i(\lambda)}\cdot\lambda, \tag{19}$$

gdzie $v_i(\lambda)$ to strumień zdyskontowanych (na początek ubezpieczenia) oczekiwanych płatności ponoszonych przez ubezpieczonego znajdującego się na początku w *i*-tej klasie.

2.1.2. Metody bazujące na prawdopodobieństwie stanu równowagi

W literaturze proponuje się też mierniki, które uwzględniają nie tylko samą analizę rozkładu prawdopodobieństwa równowagi. Wszystkie one bazują na prawdopodobieństwie stanu równowagi q_i^*, które można intepretować w następujący sposób: z jakim prawdopodobieństwem (q_i^*), przy dostatecznie długim funkcjonowaniu systemu *bonus-malus*, wylosowany klient znajduje się w klasie *i*. Wartości q_i^* wyznaczane są z rozwiązania układu l+1 (l – łączna liczby klas *bonus* i *malus*) równań z l niewiadomymi:

$$\begin{cases} q_0^*=q_0^*p_{0,0}+q_1^*p_{1,0}+q_2^*p_{2,0}+q_3^*p_{3,0}+\ldots+q_{l-1}^*p_{l-1,0}+q_l^*p_{l,0}\\ q_1^*=q_0^*p_{0,1}+q_1^*p_{1,1}+q_2^*p_{2,1}+q_3^*p_{3,1}+\ldots+q_{l-1}^*p_{l-1,1}+q_l^*p_{l,1}\\ \vdots\\ q_k^*=q_0^*p_{0,k}+q_1^*p_{1,k}+q_2^*p_{2,k}+q_3^*p_{3,k}+\ldots+q_{l-1}^*p_{l-1,k}+q_l^*p_{l,k}\\ \vdots\\ q_{l-1}^*=q_0^*p_{0,l-1}+q_1^*p_{1,l-1}+q_2^*p_{2,l-1}+q_3^*p_{3,l-1}+\ldots+q_{l-1}^*p_{l-1,l-1}+q_l^*p_{l,l-1}\\ q_l^*=q_0^*p_{0,l}+q_1^*p_{1,l}+q_2^*p_{2,l}+q_3^*p_{3,l}+\ldots+q_{l-1}^*p_{l-1,l}+q_l^*p_{l,l}\\ 1=q_0^*+q_1^*+q_2^*+q_3^*+\ldots+q_{l-1}^*+q_l^* \end{cases} \tag{20}$$

Wartości p_{ij} pochodzą z macierzy przejścia.

Poniżej zaprezentowane zostaną trzy z cząstkowych wskaźników opartych na prawdopodobieństwie stanu równowagi:

- **Stosunek oczekiwanych wartości zniżek i zwyżek w klasach taryfikacyjnych**

  Miernik ten pozwala uwzględniać dwie dodatkowe kwestie, tj. fakt, że systemy różnią się między sobą liczbą klas taryfowych i wartościami przyznawanych bonusów i malusów.

  Najpierw należy obliczyć oczekiwane wartości uzyskanych zniżek/zwyżek składki w poszczególnych klasach taryfowych w oparciu o prawdopodobieństwa stanu równowagi. Otrzymane wartości oczekiwane odnosić się będą do systemu w wymiarze długookresowym wg następujących formuł:

$$E_i^m(t_i)=t_i\cdot q_i^* \quad E_i^b(t_i)=t_i\cdot q_i^*, \tag{21}$$

26. Ibidem.

gdzie:
i to numer klasy taryfowej (łącznie klasy *malus* (0,1,2…k) i *bonus* – (k+1, k+2,…,l);
$E_i^m(t_i)$ – oczekiwana wartość zwyżki w *i*-tej klasie *malus*;
$E_i^b(t_i)$ – oczekiwana wartość zniżki w *i*-tej klasie *bonus*;
q_i^* – prawdopodobieństwo równowagi dla *i*-tej klasy;
t_i – wartość zwyżki lub zniżki w *i*-tej klasie taryfikacyjnej;[27]

Uwzględnienie liczby klas w systemie następuje poprzez wyznaczenie zagregowanej (ogólnej) wartości oczekiwanej w obrębie klas *malus*, a także w obrębie klas *bonus*. Wówczas uzyskane zostaną: ogólna oczekiwana wartość zwyżek dla klas malus, jako:

$$E^m(t) = \sum_{i=0}^{k} E_i^m(t_i), \tag{22}$$

gdzie:
$E^m(t)$ – ogólna oczekiwana wartość zwyżek;
$E_i^m(t_i)$ – oczekiwana wartość zwyżki w *i*-tej klasie malus;
i ogólna oczekiwana wartość zniżek dla klas bonus, jako:

$$E^b(t) = \sum_{i=k+1}^{l} E_i^b(t_i), \tag{23}$$

gdzie:
$E^b(t)$ – ogólna oczekiwana wartość zniżek;
$E_i^b(t_i)$ – oczekiwana wartość zniżki w *i*-tej klasie *bonus*.

Ostatecznie należy wyliczyć stosunek tych dwóch wielkości:

$$\frac{E^m(t)}{E^b(t)} \tag{24}$$

Interpretacja tego wskaźnika jest następująca: im bardziej wartość wskaźnika przekracza wartość 1 (czyli zwyżki stawki znacząco pokrywają zniżki), tym system uchodzi za bardziej rygorystyczny. Warto zwrócić uwagę, że rzeczywiście tak skonstruowany miernik ujmuje dwa aspekty, którymi mogą się różnić systemy *bonus-malus*: liczbę klas i wartość zwyżek/zniżek stawki podstawowej. Przykładowo: podniesienie zwyżek, przy pozostałych warunkach niezmienionych, zwiększy wartość miernika, podobnie jak przy niezmienionych pozostałych warunkach likwidacja niektórych klas bonusowych.

Stosunek oczekiwanych wartości zniżek i zwyżek w klasach taryfikacyjnych[28]. Miernik ten jest ilorazem oczekiwanej wartości zwyżek dla klas malus i oczekiwanej wartości zniżek dla klas bonus obliczonych dla stanu równowagi systemu.

---

27. Przy wyznaczaniu wartości zwyżki/zniżki t_i w klasach przyjmuje się założenie, że stawka podstawowa jest jednostkowa.

28. Ł. Gwizdała, *Możliwości analizy systemów* bonus-malus *w świetle procesów Markowa*, w: *Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku*, red. Wanda Ronka-Chmielowiec, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 228, Wrocław 2011.

Miernik ten jest łatwy w interpretacji, uwzględnia też strukturę portfela. Wśród wad wymienia się wysoki poziom jego ogólności (jest to mocno zagregowana miara). Ponadto wskaźnik ten traci na znaczeniu dla systemów funkcjonujących dostatecznie długo, aby klienci bezszkodowi „zagnieździli się" w klasie o najwyższym poziomie składki, taka sytuacja zaniża mocno wartość wskaźnika.

- **Wartość oczekiwana czasu przejścia po raz pierwszy z klasy *i*-tej do *j*-tej**

Ocenę efektywności systemu można też przeprowadzić pod kątem tego, jak szybko od wejścia do systemu klient dostanie się do upatrzonej przez siebie klasy docelowej. Wybór klasy docelowej może być dowolny, niemniej najczęściej klienci pożądają najwyższych możliwych zniżek. Zadanie zatem sprowadza się przede wszystkim do wyznaczenia rozkładu tej zmiennej.

Rozkład zmiennej losowej T, oznaczającej czas, jaki upływa od momentu wejścia ubezpieczonego do i-tej klasy taryfikacyjnej, do przejścia do klasy j-tej po raz pierwszy, wyznacza się z wykorzystaniem prawdopodobieństw p_{ij}^{m}, gdzie i to klasa startowa ,a j – docelowa, zawartych w macierzach przejścia w m latach $M^{(m)}$. Macierz przejścia należy jednak tak zmodyfikować, aby można z niej było odczytać prawdopodobieństwa przejścia z klasy uznanej za początkową do docelowej w przeciągu m lat, które interpretuje się jako wartości dystrybuanty czasu do pierwszego wejścia w stan docelowy, czyli:

$$F_T(m) = P\left[T \le m\right] = p_{i,j}^{(m)}. \tag{25}$$

Następnie, odejmując kolejne wartości dystrybuant, uzyskuje się rozkład prawdopodobieństwa $p_T(m)$ zmiennej losowej T. Po policzeniu wartości oczekiwanej znanej te można dokonać interpretacji systemu – im wyższa wartość oczekiwana, tym system jest bardziej rygorystyczny dla ubezpieczonych i klient dłużej musi oczekiwać na „dostanie się" do najkorzystniejszej dla niego klasy.

Zaletą tej metody jest to, że pozwala dokonać analizy systemu zarówno dla pojedynczego klienta, jak i w ujęciu całościowym w zakładzie ubezpieczeń. Jej wadą jest fakt, że mierzy tylko pierwsze przejście klienta po systemie. Nie jest zatem użyteczna do pomiaru efektywności dla klienta, który dokonał zmiany ubezpieczyciela, a po pewnym czasie powrócił do dotychczasowego.

- **Średni względny przyrost prawdopodobieństwa pozostania lub powrotu ubezpieczonego do strefy *malus* systemu**

Klient może też badać efektywność systemu, zadając sobie pytanie: z jakim prawdopodobieństwem zostanę w tym samym miejscu lub trafię do klasy zwyżkowej, jeśli jeszcze rok pozostanę w tym systemie. By otrzymać odpowiedź, należy wyliczyć prawdopodobieństwo pozostania danego ubezpieczonego w bieżącej klasie bądź jego przejścia do klas o wyższych poziomach składki w ciągu m lat. W efekcie, dla kolejnych, coraz dłuższych okresów, otrzymuje się wartości prawdopodobieństwa dla każdej klasy *malus*. Niech będą one oznaczone przez:

$$p_i^{(m)} = \sum_j p_{ij}^{(m)}, \tag{26}$$

gdzie:

$p_i^{(m)}$ – prawdopodobieństwo, że polisa z i-tej klasy malus w niej pozostanie lub przejdzie do innej klasy malus w ciągu m lat;

i – numer rozważanej klasy malus;

j – kolejne numery istniejących klas malus, w tym $j = i$.

Jednakże, z punktu widzenia postawionego problemu, bardziej interesujące jest prawdopodobieństwo łączne dla wszystkich klas malus. Wartość ta może posłużyć do wyliczenia prawdopodobieństwa, że ubezpieczony po *m* latach wciąż będzie w strefie malus lub do niej powróci. Należy tego dokonać przez użycie systemu wag[29], policzonego z uwzględnieniem prawdopodobieństwa równowagi, wg następującej formuły:

$$W_i = \frac{q_i^*}{\sum_j q_j^*}, \tag{27}$$

gdzie:
W_i – waga dla *i*-tej klasy malus;
i – numer *i*-tej klasy malus;
j – numery kolejnych klas malus, w tym $j = i$.

Ostatecznie prawdopodobieństwo, że ubezpieczony po *m* latach wciąż będzie w strefie malus lub do niej powróci wyrażone będzie przez:

$$p_{ml}^{(m)} = \sum_i \sum_j W_i p_{ij}^{(m)} \tag{28}$$

gdzie:
$p_{ml}^{(m)}$ – prawdopodobieństwo, że ubezpieczony po *m* latach wciąż będzie w strefie malus lub do niej powróci
i – numer *i*-tej klasy malus;
j – numery kolejnych klas malus, w tym $j = i$.

Naturalnie, w przypadku większości systemów *bonus-malus* mowa będzie o przeciętnym zmniejszaniu się wartości prawdopodobieństwa, tzn. $(b-1)\times 100$ proc. będzie mniejsze od zera. Stąd system określić można, jako tym bardziej rygorystyczny, im większy będzie średni przyrost względny dla oszacowanej funkcji regresji. Uogólniając, miernik ten pozwala ustalić, w jakim stopniu klasy *malus* systemu są zdolne do utrzymywania i do przyciągania ubezpieczonych, a ściślej, w jakim tempie tę zdolność tracą.[30]

Zatem metoda ta jest użyteczna dla identyfikacji tych klientów, wobec których istnieje ryzyko łatwego przejęcia przez konkurujące zakłady ubezpieczeń, gdyż mogą oni oceniać jako coraz mniej pewne utrzymanie swoich zniżek w systemie tego zakładu, w którym są obecnie. Jest to oczywistą zaletą tego miernika. Jego wada to natomiast oparcie go na danych agregowanych.

Podsumowanie

Po przeglądzie wybranych kilkunastu metod oceny efektywności systemu *bonus-malus* należy podkreślić, że każda z tych miar jest fragmentaryczna, ponadto nie uwzględniają one elementów jakościowych związanych z procesem ubezpieczenia. Co więcej są to głównie miary efektywności taryfikacyjnej, oceniające, w jakim stopniu system *bonus-malus* dostosowuje składkę do in-

29. Jeśli ubezpieczeni rozkładaliby się równomiernie pomiędzy klasy malusowe, wówczas wystarczyłoby zsumowanie prawdopodobieństw $p_i^{(m)}$ po *i*, a następnie podzielenie otrzymanej wartości przez liczbę klas *malus*.
30. Ibidem.

dywidualnego ryzyka. Niektóre metody (miara łącznej zmienności systemu) badają też poziom nierównowagi systemu (im większa nierównowaga, tym gorsze dopasowanie składki do indywidualnego ryzyka). Tylko niektóre (łączna elastyczność) uwzględniają strukturę portfela ubezpieczycieli i przepływu klientów między systemami. Celem dokonywania operacji matematycznych tworzy się modele, które opierają się na silnych założeniach, nieprzystających w pełni do praktyki rynkowej (jak niezależność szkód; nie uwzględniają zmiany częstości szkód w czasie – wzrost doświadczenia kierowcy, zmiana samochodu na nowszy, bezpieczniejszy, wzrost liczby kilometrów pokonywanych w ciągu roku itp.).

W analizie należy też uwzględnić specyfikę polskiego rynku ubezpieczeń komunikacyjnych, w którym to obszarze spotyka się system *bonus-malus*. Wskazać można trzy podstawowe ograniczenia i obciążenie polskiego rynku:
1. Silne obciążenie historyczne, związane z wieloletnim monopolem jednego ubezpieczyciela i wciąż jeszcze silną jego pozycją;
2. Oferowane w Polsce produkty ubezpieczeniowe sprzedawane przez ubezpieczycieli wchodzących w międzynarodowe grupy kapitałowe to często kopie produktów z większych rynków, przez co produkty są niedostosowane do polskich warunków;
3. W Polsce zasady funkcjonowania ubezpieczenia OC kierowców, przez to, że jest to ubezpieczenie obowiązkowe, reguluje ustawa. Odnośnie funkcjonowania systemu *bonus-malus*, największym ograniczeniem jest brak możliwości odmówienia klientowi ubezpieczenia obowiązkowego przez zakład, który prowadzi sprzedaż ubezpieczeń w tym obszarze. Powoduje to, że jedynie poziomem składki zakład może takiego klienta zniechęcić do zakupienia produktu ubezpieczeniowego. Taka sytuacja silnie rzutuje na to, jak funkcjonuje system *bonus-malus* dla ubezpieczeń OC.

Wykaz źródeł

Coene G., Doray L.G., *A financially balanced* bonus-malus *system*, „Astin Bulletin" 26, 1996, s. 107–116.

Daykin C.D., Pentikänen T., Pesonen H., *Practical risk theory for actuaries*, Chapman&Hall, London 1994.

Fisz M., *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, PWN, Warszawa 1967.

Gwizdała Ł., *Możliwości analizy systemów* bonus-malus *w świetle procesów Markowa*, w: *Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku*, red. Wanda Ronka-Chmielowiec, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 228, Wrocław 2011.

Kochański B., *Efektywność funkcjonowania systemu* bonus-malus *w ubezpieczeniach komunikacyjnych w Polsce i w wybranych krajach europejskich*, Praca magisterska napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Mirosława Szredera, Uniwersytet Gdański 2000.

Lemaire J., Bonus-Malus *systems: the European and Asian approach to merit rating*, „North American Actuarial Journal Society of AcutariesÍ – Schaumburg, Illinois, 1998: 2:1, 26–47, dostępne na www.soa.org/library/journals/north-american-actuarial-journal/1998/january/naaj9801_2.pdf.

Lemaire J., *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Boston: Kluwer 1995.

Szymańska A., *Wybrane miary efektywności systemów* bonus-malus *ubezpieczeń komunikacyjnych OC*, w: Ubezpieczenia wobec wyzwań XXI wieku, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 1127, 2008, s. 428–435.

Vaughan E.J., Fundamentals of risk and insurance, John Wiley and sons, 1992.

Classical measures of effectiveness of the *bonus-malus* system

The main aim of the introduction of the bonus-malus *system to motor insurance was to obtain a tool which would enable matching the insurance premium amount to the level of risk assumed by insurance undertakings correctly, and a stimulus influencing the frequency of adverse fortuitous events, i.e. vehicle thefts, road collisions and cases of insurance fraud. This system is currently widespread throughout the EU. Unfortunately, more and more often opinions can be heard that its effectiveness is not always at a satisfying level.*

In order to assess the system's tariff effectiveness the Markov chain theory and negative binomial model are usually used. Thanks to these tools it is possible to approximately determine the level at which the insurance premium is matched to the motor risk insured.

The aim of the article is to briefly present these methods and indicate the key areas of the system's operation which are subject to assessment in them.

Key words: motor insurance, bonus-malus system, Markov processes, insurance premium, loss ratio.

DR ANNA JĘDRZYCHOWSKA – adiunkt w Katedrze Ubezpieczeń Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.

DR EWA POPRAWSKA – adiunkt w Katedrze Ubezpieczeń Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu.