ANNA CHOJAN

Modele teorii zaufania – metoda kalkulacji składki ubezpieczeniowej w niejednorodnych portfelach polis

Jedną z czynności leżących u podstaw działalności ubezpieczeniowej jest odpowiednie wyznaczanie składek ubezpieczeniowych – w taki sposób, aby z zadanym prawdopodobieństwem wystarczyły na wypłatę świadczeń, pokrycie kosztów prowadzenia działalności ubezpieczeniowej oraz zapewnienie ubezpieczycielowi pewnego zysku. W celu kalkulacji składek przypisywanych danemu produktowi ubezpieczeniowemu polisy są grupowane w portfele, do których dopasowywane są rozkłady prawdopodobieństwa występowania szkód oraz ich wartości. W praktyce podział na takie portfele jest spowodowany różnymi warunkami ubezpieczenia (rozważane są wiek i wartość ubezpieczanego mienia, parametry techniczne, stosunek do ryzyka, zakres ubezpieczenia itd.). Portfele te, z uwagi na występowanie różnic w parametrach rozkładów, nazywane są niejednorodnymi. Na wysokość składek w niejednorodnych portfelach polis mają wpływ obserwacje pochodzące zarówno z poszczególnych portfeli, jak i z ogółu polis, a metodą kalkulacji składek w takich przypadkach jest teoria zaufania (nazywana także teorią wiarygodności), której przesłanki, podstawowe założenia oraz przykładowa realizacja zostaną zaprezentowane w artykule.

Słowa kluczowe: teoria zaufania, składka zaufania, ryzyko ubezpieczeniowe, kalkulacja składki ubezpieczeniowej.

Wprowadzenie

Kategorią ryzyka charakterystyczną jedynie dla ubezpieczeń jest ryzyko ubezpieczeniowe, które obejmuje ryzyka związane ze zdarzeniami objętymi ochroną ubezpieczeniową oraz procesami zachodzącymi w związku z prowadzeniem działalności ubezpieczeniowej[1]. Jedną z głównych operacji

1. M. Lament, *Ryzyko w zakładzie ubezpieczeń*, [w:] *Ubezpieczenie non-life*, [red.] E .Wierzbicka, CeDeWu, Warszawa 2011, s. 95.

generujących to ryzyko jest kalkulacja składki ubezpieczeniowej. Z punktu widzenia zakładu ubezpieczeń niekorzystne jest zarówno przeszacowanie, jak i niedoszacowanie składki. Wyznaczenie jej na zbyt niskim poziomie może doprowadzić do zebrania środków niewystarczających na pokrycie odszkodowań i w konsekwencji zachwiać stabilnością finansową zakładu ubezpieczeń. Ustalenie składki na poziomie zbyt wysokim, przy przyjęciu postawy asekuracyjnej, może doprowadzić do strat związanych z brakiem konkurencyjności na rynku oraz odpływem polis.

Celem artykułu jest zwrócenie uwagi na problem odpowiedniej kalkulacji składki w niejednorodnych portfelach polis oraz przedstawienie teorii wiarygodności jako metody wyznaczania składki w takich portfelach.

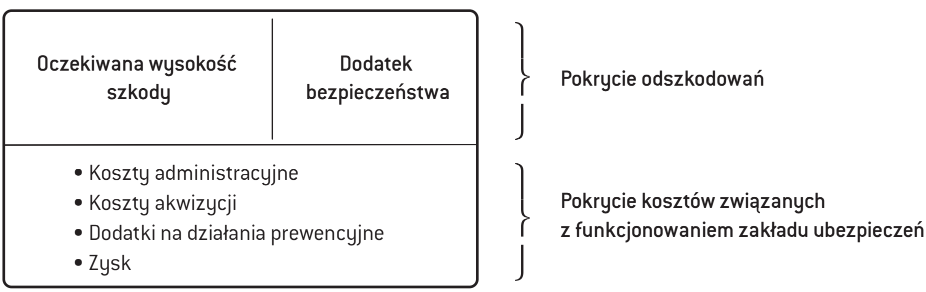
1. Budowa składki ubezpieczeniowej

Kalkulacja składki ubezpieczeniowej jest jednym z zadań leżących u podstaw działalności ubezpieczeniowej. Składka powinna być wyznaczona w taki sposób, aby zapewnić niezbędne środki na wypłatę odszkodowań, tworzenie rezerw techniczno-ubezpieczeniowych oraz pokrycie kosztów związanych z prowadzeniem działalności ubezpieczeniowej[2]. Tak zdefiniowana, nazywana jest składką brutto i stanowi cenę, jaką ubezpieczający płaci zakładowi ubezpieczeń za zapewnianą ochronę ubezpieczeniową[3]. Ta część składki, która ma wystarczyć na wypłatę odszkodowań, nazywana jest składką netto i stanowi podstawę wyceny ubezpieczenia. Kontrakt pomiędzy ubezpieczającym a ubezpieczonym, w którym ubezpieczyciel zobowiązuje się do pokrycia określonej szkody w zamian za opłatę (składkę), nazywamy polisą[4].

Ze względu na stosunkowo dużą łatwość kalkulacji narzutu na składkę netto w dalszej części rozważany jest wyłącznie problem składki netto.

Na rys. 1. przedstawiony został uproszczony schemat budowy składki.

Rysunek 1. Budowa składki ubezpieczeniowej[5]



2. B. Błaszczyszyn, T. Rolski, *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, WNT, Warszawa 2004, s. 90.
3. P. Kowalczyk, E. Poprawska, *Metody kalkulacji składki w ubezpieczeniach typu non-life*, [w:] *Metody aktuarialne*, [red.] W. Ronka-Chmielowiec, PWN, Warszawa 2006, s. 79.
4. W. Niemiro, *Teoria ryzyka w ubezpieczeniach*, www-users.mat.umk.pl/~wniem/Ryzyko/RyzykoUB.pdf [dostęp: 25.07.2017], s. 3.
5. P. Kowalczyk, E. Poprawska, *Metody* …, s. 80.

Jedną z głównych idei ubezpieczeń jest „dzielenie się ryzykiem", czyli pokrywanie wspólnie, przez wielu ubezpieczających, indywidualnej straty[6]. Idea ta ma odzwierciedlenie w metodologii kalkulacji składek, gdyż zasadne jest wtedy (z uwagi na wystarczającą ilość danych) stosowanie zasad statystyki i ustalanie składki jako wartości oczekiwanej rzeczywistego, losowego kosztu ubezpieczenia. Średnia wartość wydatków na jednego ubezpieczonego jest tym bliższa wartości oczekiwanej, im większa liczba ubezpieczonych. Poprzez grupowanie polis konstruowane są tak zwane portfele[7], w taki sposób, by zakumulowana wartość zebranych składek wystarczyła na pokrycie rzeczywistej sumy wypłat w danym portfelu.

1.1. Zasada czystego ryzyka

Podstawową i zarazem najprostszą regułą naliczania składki jest zasada czystego ryzyka (zasada równoważności składki), która opiera się na równoważności pomiędzy wartością zebranej składki P a wartością oczekiwaną odszkodowań[8]:

$$P = E(Z), \tag{1}$$

Gdzie Z jest zmienną losową opisującą wartość odszkodowań.

Stosując tę zasadę, należy przyjąć następujące założenia[9]:

- prawdopodobieństwo zdarzenia ubezpieczeniowego dla każdego ryzyka w portfelu jest takie samo i wynosi p,
- każde ryzyko w portfelu ubezpieczone jest na taką samą sumę s,
- występują tylko szkody całkowite.

Przedstawioną regułę w praktyce modyfikuje się poprzez zastosowanie dodatków bezpieczeństwa oraz uwzględnienie zmienności zmiennej losowej Z. Można wyróżnić powstałe w ten sposób zasady: wartości oczekiwanej, wariancji i czystego ryzyka. Metody te, oprócz dużej prostoty, cechują się założeniami trudnymi do zrealizowania w rzeczywistości, co ogranicza ich zastosowanie do portfeli jednorodnych, występujących jedynie incydentalnie.

1.2. Niejednorodność portfela polis

We wspomnianych podstawowych modelach kalkulacji składki ubezpieczeniowej zakładane są: znajomość rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych opisujących ryzyko oraz jednorodność portfela. Przez portfel jednorodny należy rozumieć zbiór polis dotyczący ubezpieczanych dóbr o zbliżonej wartości i podobnym prawdopodobieństwie wystąpienia wypadku ubezpieczeniowego[10]. Niejednorodność występuje więc, jeżeli wśród obiektów o podobnej sumie ubezpieczenia znajduje się grupa obiektów o sumie ubezpieczenia dużo wyższej (niejednorodność ilościowa) lub gdy

6. W. Niemiro, *Teoria*..., s. 55.
7. B. Błaszczyszyn, T. Rolski, *Podstawy*..., s. 107.
8. W. Ronka-Chmielowiec, *Zarządzanie*..., s. 345.
9. P. Kowalczyk, E. Poprawska, *Metody*..., s. 81.
10. R. Szekli, *Matematyka ubezpieczeń majątkowych i osobowych*, Skrypt do wykładu, www.math.uni.wroc.pl/~szekli/documents/mumio/mumio12/skrypt-12.pdf [dostęp: 25.07.2017].

wśród obiektów charakteryzujących się podobnym poziomem zagrożenia wypadkiem ubezpieczeniowym występują obiekty znacznie różniące się w tym zakresie (niejednorodność jakościowa)[11].

W celu formalnego zdefiniowania niejednorodności rozpatrzmy następujący niejednorodny portfel polis $(X_{11}, \dots, X_{pn_p})$ podzielony na p podgrup (tab. 1.):

Podgrupa	Parametr	Dane
Podgrupa polis nr 1	Θ_1	$X_{11}, \dots, X_{1i}, \dots, X_{1n_1} \sim P_{\Theta_1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Podgrupa polis nr j	Θ_j	$X_{j1}, \dots, X_{ji}, \dots, X_{jn_j} \sim P_{\Theta_j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Podgrupa polis nr p	Θ_p	$X_{p1}, \dots, X_{pi}, \dots, X_{pn_p} \sim P_{\Theta_p}$

Tabela 1 Portfel polis podzielony na p podgrup (podportfeli)

Gdzie $n_1, \dots, n_j, \dots, n_p \in \mathbb{N}$, n_j – liczebność polis w j-tej podgrupie, X_{ji} – realizacja zmiennej losowej X (oczekiwana wartość szkód) w j-tej podgrupie i i-tym momencie obserwacji (np. w i-tym roku). Parametr Θ_j charakteryzuje rozkład zmiennej losowej X w j-tym podportfelu.

Celem zastosowania przedstawionego podziału jest uzyskanie mniej zróżnicowanych podgrup, w których łączny rozkład wartości szkód można modelować za pomocą niezależnych zmiennych losowych o tych samych rozkładach.

Mówimy, że portfel polis jest jednorodny, jeśli zachodzi[12]:

$$\Theta = \Theta_1 = \dots = \Theta_j = \dots = \Theta_n. \tag{2}$$

Należy pamiętać, że równość rozpatrywana jest tutaj w sensie statystycznym i oznacza, że parametry Θ_j dla $j = 1, \dots, n$ nie różnią się istotnie (brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej (2) testu jednorodności).

Mówimy, że portfel polis jest niejednorodny, jeśli równość (2) nie jest spełniona.

Rozpatrzmy dwa skrajne przypadki:

a) Kiedy zachodzi równości (2), zastosowanie znajduje zasada czystego ryzyka. Podział na podgrupy polis w tab. 1. możemy uznać za nieistotny, co skutkuje możliwością wyznaczenia $\hat{\Theta}$ –estymatora Θ na podstawie połączonej próbki $X_{11}, \dots, X_{1n_1}, \dots, X_{p1}, \dots, X_{pn_p}$ oraz przewidzenia równej wysokości szkód $\mu(\hat{\Theta})$ dla każdej z polis. W rezultacie wyznaczymy jednakową składkę dla każdej polisy.

   Należy mieć jednak na uwadze, że równość (2) spełniona jest jedynie w sensie statystycznym, co w przełożeniu na rzeczywiste dane może okazać się niedostateczne. Wystarczy wyobrazić sobie przykładową sytuację, w której dwie osoby, z których jedna miała w ubiegłym roku 2 szkody, a druga 0 (przy pozostałych parametrach niezmienionych), płacą taką samą składkę za ubezpieczenie OC posiadaczy pojazdów mechanicznych. Sytuacja taka nieuchronnie prowadziłaby do negatywnej selekcji ryzyka.

11. J. Schulz, *Zakres pojęć „wyrównanie ryzyka" i „pokrycie ryzyka" w ubezpieczeniach*, „Studia Ubezpieczeniowe" 1975, tom 2, s. 109.
12. W. Niemiro, *Teoria*…, s. 11.

b) Sytuację przeciwną – niejednorodność, w skrajnym przypadku polegającą na rozpatrywaniu podgrup polis jako zbiorów jednoelementowych. Otrzymujemy: $\hat{\Theta}_1$ – estymator Θ_1 na podstawie danych $X_{11}, ..., X_{1i}, ..., X_{1n_1}, \ldots, \hat{\Theta}_j$ – estymator Θ_j na podstawie $X_{j1}, ..., X_{ji}, ..., X_{jn_j}, \ldots, \hat{\Theta}_p$ – estymator Θ_p na podstawie $X_{p1}, ..., X_{pi}, ..., X_{pn_p}$. Przewidywane są wtedy różne szkody $\mu(\hat{\Theta}_1), \ldots, \mu(\hat{\Theta}_p)$, co implikuje inne wysokości składek dla każdej z podgrup. Założenie tak skrajnej niejednorodności niesie ze sobą następujące wady[13]:
- niedokładność estymatorów indywidualnych (wynikająca ze zbyt małej ilości danych),
- niezgodność z ideą ubezpieczenia (dzielenie się ryzykiem).

Należy mieć na uwadze, że w przypadku dysponowania przez zakład ubezpieczeń odpowiednio dużą ilością obserwacji składka może być kalkulowania indywidualnie dla każdej podgrupy polis lub nawet pojedynczej polisy. Takie rozwiązanie, zastosowane gdy zbiór danych jest zbyt mało liczny, jest niedopuszczalne, gdyż prowadzi do błędów[14].

Rozwiązaniem tego problemu może być teoria zaufania, która pozwala na odpowiednie zróżnicowanie wysokości składki oraz zminimalizowanie przedstawionych problemów[15].

2. Teoria zaufania

Credibility theory, tłumaczona jako teoria zaufania lub teoria wiarygodności, jest działem statystyki, powstałym na początku XX wieku, związanym z podejściem bayesowskim i modelami liniowymi[16]. Początków teorii zaufania upatruje się w dwóch artykułach opublikowanych w czasopiśmie „Proceedings of the Casualty Actuarial and Statistical Society of America" w roku 1914 (A.H. Mowbray) oraz 1918 (A.W. Whithey). Teoria zaufania dostarcza metod służących do obliczania składki wiarygodności w niejednorodnych portfelach polis. Pozwala na dopasowanie przyszłych składek na podstawie wiedzy historycznej o polisie oraz o całym portfelu[17].

Składka ubezpieczeniowa netto w *j*-tym podportfelu, wyznaczona za pomocą metody wiarygodności, przyjmuje następującą postać:

$$P_j = z_j\bar{X}_j + (1 - z_j)\bar{X} \tag{3}$$

Gdzie:

$\bar{X}_j$ – średnia wartość ryzyka (wartość wypłat) w *j*-tym portfelu polis,
$\bar{X}$ – średnia wartość ryzyka generowanego przez cały portfel polis (średnia wartość wypłat),
z_j – współczynnik wiarygodności/zaufania (jak 'wiarygodny' jest wpływ indywidualnego doświadczenia *j*-tej grupy), $0 \le z_j \le 1$.

13. W. Niemiro, *Teoria*..., s. 54–55.
14. P. Kowalczyk, E. Poprawska, *Metody*..., s. 81.
15. R. Norberg, *Credibility Theory*, citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.593.8592&rep=rep1&type=pdf [dostęp: 25.07.2017].
16. W. Niemiro, *Teoria*..., s. 55.
17. H. Jasiulewicz, W. Kordecki, *Składki zaufania z zastosowaniem niesymetrycznych funkcji strat*, [w:] *Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka*, [red.] W. Ostasiewicz, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2011, s. 101–117.

P_j nazywamy składką wiarygodności (lub składką zaufania) w j-tym podportfelu. Podstawowym problemem w stosowaniu tej metody jest wyznaczenie współczynnika wiarygodności z_j dla $j = 1$, ... p, czyli ustalenie, jak silny jest wpływ indywidualnego doświadczenia w j-tej podgrupie na wysokość składki.

W poniższym przykładzie, w celu intuicyjnego przedstawienia problemu jednorodności w portfelach polis, przyjęto założenia o normalnościach rozkładów wartości szkód oraz parametru Θ w populacji. W praktyce jednak rozkłady liczby szkód są najczęściej rozkładami asymetrycznymi, a szczegółowe rozważania na ten temat, z uwzględnieniem zastosowania teorii zaufania, można znaleźć w literaturze[18].

Przykład[19] – wyznaczenie składki wiarygodności (rozważania teoretyczne)

Rozpatrzmy portfel polis pogrupowanych na p podgrup, spełniających założenia o normalności rozkładu wartości szkód oraz o normalnym rozkładzie parametru Θ w populacji.

Wówczas:

Próbka $X_1, ..., X_n$ (szkody w podgrupie) ma rozkład normalny $N(\Theta, s^2)$, a gęstość prawdopodobieństwa pojedynczej obserwacji wynosi:

$$f_{\Theta}(x) = const \times exp\left[-\frac{1}{2s^2}(x-\Theta)^2\right]$$

Rozkład parametru Θ jest normalny $N(m, a^2)$, a gęstość jego prawdopodobieństwa wynosi:

$$\pi(\Theta) = const \times exp\left[-\frac{1}{2a^2}(\Theta-m)^2\right].$$

Wtedy rozkład warunkowy parametru Θ wynosi:

$$\begin{aligned}
\pi_x(\Theta) &= f(\Theta | x_1, ..., x_n) = const \times f(\Theta; x_1, ..., x_n) \\
&= const \times exp\left[-\frac{1}{2a^2}(\Theta-m)^2 - \frac{1}{2s^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\Theta)^2\right] \\
&= const \times exp\left[-\frac{1}{2a^2}\Theta^2 + \frac{m}{a^2}\Theta - \frac{n}{2s^2}\Theta^2 + \frac{n\bar{x}}{s^2}\Theta\right] \\
&= const \times exp\left[-\frac{na^2+s^2}{2s^2a^2}\left(\Theta^2 - 2\Theta\frac{na^2\bar{x}+s^2m}{na^2+s^2}\right)\right] \\
&= const \times exp\left[-\frac{na^2+s^2}{2s^2a^2}\left(\Theta - \frac{na^2\bar{x}+s^2m}{na^2+s^2}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

18. Zob. np. W. Niemiro, *Teoria zaufania*, [w:] idem, *Teoria ryzyka*..., a także: H. Jasiulewicz, W. Kordecki, *Składki*...
19. W. Niemiro, *Teoria* ..., s. 68–69.

Skąd wynika:

$$\hat{\Theta} = \frac{na^2\overline{x} + s^2 m}{na^2 + s^2}$$

$$= \frac{na^2\overline{x} + s^2 m + na^2 m - na^2 m}{na^2 + s^2}$$

$$= \frac{na^2\overline{x}}{na^2 + s^2} + \frac{(na^2 - na^2 + s^2)m}{na^2 + s^2}$$

$$= \frac{na^2}{na^2 + s^2}\overline{x} + (1 - \frac{na^2}{na^2 + s^2})m$$

$$= \frac{na^2}{na^2 + s^2}\overline{x} + (1 - \frac{na^2}{na^2 + s^2})m \qquad (4)$$

$$\hat{\Theta} = z_i\overline{x} + (1 - z_i)m \qquad (5)$$

Wnioski:

Przy założeniach przyjętych w przedstawionym przykładzie zachodzi (3) = (4), skąd możemy wnioskować, że (4) jest równe składce zaufania.

Z (4) oraz (5) wynika, że w tym przypadku współczynnik wiarygodności z_j wynosi:

$$z_j = \frac{a^2 n_j}{a^2 n_j + s^2} = 1 - \frac{s^2}{a^2 n_j + s^2} \qquad (6)$$

Z równanie (6) wynikają warunki spełniane przez współczynnik wiarygodności z_j (tabela 2).

Tabela 2. Warunki spełniane przez współczynnik wiarygodności z_j

Obserwacja	Interpretacja
$s^2 \uparrow \Rightarrow z_j \downarrow$	Im większe są wahania wysokości szkód w obrębie danej podgrupy w czasie, tym większa waga oczekiwanej wysokości szkody dla całego portfela
$a^2 \uparrow \Rightarrow z_j \uparrow$	Im większe są różnice pomiędzy poszczególnymi podgrupami ryzyk, tym większa waga obserwacji dotyczących danych grup (im bardziej jednorodny jest portfel, tym mniej zróżnicowane powinny być składki)
$n_j \uparrow \Rightarrow z_j \uparrow$	Im więcej obserwacji dotyczących danej grupy ryzyka, tym większa jest waga tych obserwacji

Przykład cd. (kalkulacje)

Rozpatrzmy fikcyjne dane (tab. 3.) dotyczące średnich wysokości szkód w piętnastu podgrupach polis (3 kategorie ze względu na wiek motocyklisty i 5 kategorii ze względu na typ pojazdu, oznaczane x_i) obserwowane w ciągu dziesięciu kolejnych lat. Analiza statystyczna wykazała, że rozkład wartości szkód oraz rozkład parametru Θ w populacji są normalne.

Tabela 3. Średnie wysokości szkód w piętnastu podgrupach polis w dziesięciu kolejnych latach

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}
1	204,0	220,8	191,4	197,4	191,2	201,6	178,0	197,7	194,5	178,0	206,2	183,5	197,5	210,1	189,5
2	203,3	208,5	195,3	185,6	196,2	210,8	198,8	213,7	201,0	173,4	208,3	200,0	192,7	207,2	192,7
3	193,0	195,9	213,2	221,8	211,6	195,8	193,9	225,8	237,2	194,8	193,8	209,1	183,2	197,8	183,2
4	186,5	200,7	194,1	203,3	195,6	203,6	221,8	220,1	179,6	199,1	199,2	171,0	202,8	199,7	180,0
5	179,6	225,5	204,9	214,2	185,4	211,1	195,9	212,7	193,1	178,8	223,5	194,1	198,6	203,0	193,2
6	197,5	199,3	186,1	200,9	180,0	206,3	181,0	216,0	207,2	178,0	203,2	209,2	195,9	196,7	195,3
7	188,5	200,7	215,9	190,2	215,9	197,8	214,9	212,5	209,0	208,1	195,1	196,4	199,6	198,1	194,2
8	185,8	221,7	185,3	190,6	196,7	215,0	200,6	205,6	185,2	191,0	220,1	202,4	207,2	213,2	198,7
9	205,2	200,2	198,4	207,8	184,8	200,7	199,4	199,1	183,5	203,5	202,9	202,7	191,4	203,0	201,6
10	208,7	224,9	189,2	225,1	199,9	196,2	180,8	194,9	205,1	198,3	223,3	212,7	188,6	205,4	195,6

Na podstawie przyjętych założeń można zastosować wzór (5) na składkę zaufania.

Wtedy, na podstawie danych przedstawionych w tab. 3., otrzymujemy:

$z = 0{,}07165$

$a^2 = 37{,}37$

$s^2 = 124{,}45$

Z uwagi na równą liczbę obserwacji w każdej podgrupie zachodzi: $z_1 - \ldots - z_{15} = z$. Na podstawie obliczeń uzyskujemy następujące wyniki:

Tabela 4. Wysokość składek zaufania w piętnastu podgrupach

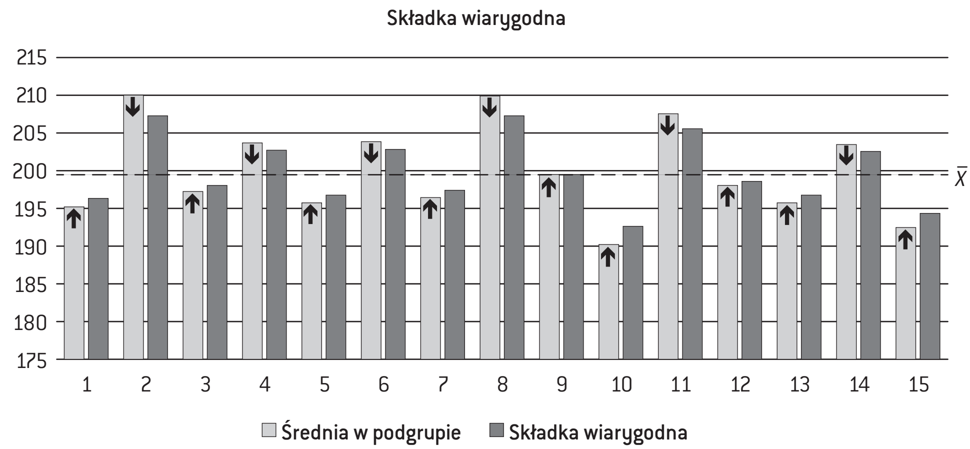
Numer podgrupy	Średnia w podgrupie	Wysokość składki
1	195,20	196,39
2	209,82	207,35
3	197,36	198,01
4	203,69	202,75
5	195,74	196,79
6	203,88	202,90
7	196,52	197,37
8	209,81	207,35
9	199,53	199,63
10	190,29	192,70
11	207,57	205,66
12	198,11	198,57
13	195,74	196,79
14	203,42	202,55
15	192,49	194,35
Średnia w całej próbie: 199,94		

Źródło: Obliczenia własne.

Analizując wyniki zebrane w tab. 4., można zauważyć różnice między wysokością średniej w podgrupie, składką zaufania dla każdej z podgrup oraz średnią wysokością odszkodowań w historii całego portfela. Gdyby przyjąć założenie o jednorodności portfela i stosować zasadę czystego ryzyka – składka netto w każdym z podportfeli równałaby się średniej wartości odszkodowań w całym portfelu, mianowicie 199,94. Sytuacja taka prowadziłaby do „negatywnej selekcji ryzyka", o czym wspominano już wcześniej.

Na wykresie 1. zaprezentowane zostało porównanie średnich wysokości odszkodowań w piętnastu podgrupach oraz przypisanych do nich składek wiarygodności. Strzałkami zaznaczono kierunki zmian każdej ze średnich w stosunku do wysokości odpowiedniej składki. Widoczna jest następująca prawidłowość: jeśli średnia w podgrupie była niższa od średniej w całym portfelu, to składka netto jest wyższa od średniej w danej podgrupie. Odwrotną zależność obserwujemy w sytuacji przeciwnej: jeśli średnia w podgrupie była wyższa od średniej w całym portfelu, to składka netto jest niższa od średniej w danej podgrupie.

Wykres 1. Porównanie wysokości średnich w podgrupach z wysokością składki wiarygodnej



Zależności zaobserwowane na wykresie 1. potwierdzają dodatkowo zasadność stosowania teorii zaufania w celu kalkulacji składek ubezpieczeniowych w portfelach niejednorodnych. Porównując średnie wartości odszkodowań w danych podgrupach oraz wysokości składek ze średnią wartością odszkodowań w danym portfelu (oznaczenie na wykresie: $\bar{X}$), można zauważyć, jak niesprawiedliwe byłoby w tym przypadku wyznaczenie składki na jednakowym poziomie dla wszystkich polis. Z pewnością nastąpiłby w takiej sytuacji problem odpływu polis z portfela (np. w podgrupach 1, 5, 10 i 15) oraz problem negatywnej selekcji ryzyka (np. w podgrupach 2, 8 i 11).

Zaprezentowany przykład jest realizacją modelu bayesowskiego, który zakłada konieczność znajomości łącznego rozkładu prawdopodobieństwa rozważanych zmiennych losowych. Modelami wymagającymi mniej szczegółowych założeń są np. model Bühlmanna i model Bühlmanna-Strauba, do których godny polecenia wstęp może stanowić przywoływana już praca prof. Wojciecha Niemiry *Teoria ryzyka w ubezpieczeniach*.

Zakończenie

Nie ulega wątpliwości, że proces kalkulacji składki wymaga zachowania najwyższej staranności. Odpowiednio wyznaczona składka, której podstawę stanowi składka netto, pozwala na prowadzenie przynoszącej zyski i nienarażonej na niepotrzebne ryzyko działalności ubezpieczeniowej. W artykule zwrócono uwagę na problem niejednorodności w portfelach polis i zaprezentowano wstęp do teorii zaufania, pozwalający na wyznaczenie składki w portfelach niejednorodnych. Przedstawiony przykład numeryczny pozwolił na wykształcenie pewnych intuicji dotyczących odpowiedniej kalkulacji składki oraz wysnucie wniosków w kwestii budowy portfeli polis. Warto zwrócić uwagę na szczególnie interesujące wykorzystanie przedstawionej metodologii w systemach bonus-malus[20].

W artykule przywołane zostały zagrożenia dla zakładu ubezpieczeń wynikające z nieodpowiedniej kalkulacji składki wiarygodności (np. w oparciu o niewystarczające dane). W praktyce sytuację taką można przedstawić poprzez poszerzenie składki o funkcję opisującą straty wynikające zarówno z przeszacowania, jak i niedoszacowania składki. Rozróżniane są symetryczne funkcje straty (generujące taką samą stratę w przypadku niedoszacowania i przeszacowania parametru o taką samą wartość) oraz asymetryczne funkcje straty (generujące inne straty w przypadku niedoszacowania i przeszacowania parametru o taką samą wartość). Poszerzeniu wiedzy na temat tego zagadnienia może posłużyć przywoływany wyżej artykuł *Składki zaufania z zastosowaniem niesymetrycznych funkcji strat* prof. Heleny Jasiulewicz i prof. Wojciecha Kordeckiego.

Wykaz źródeł

Błaszczyszyn B., Rolski T., *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, WNT, Warszawa 2004.

Jasiulewicz H., Kordecki W., *Składki zaufania z zastosowaniem niesymetrycznych funkcji strat*, [w:] *Zagadnienia aktuarialne – teoria i praktyka*, Ostasiewicz W. [red.], Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2011.

Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., *Credibility theory*, [w:] *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston 2001.

Kowalczyk P., Poprawska E., *Metody kalkulacji składki w ubezpieczeniach typu non-life*, [w:] *Metody aktuarialne*, Ronka-Chmielowiec W. [red.], PWN, Warszawa 2006.

Lament M., *Ryzyko w zakładzie ubezpieczeń*, [w:] *Ubezpieczenie non-life*, Wierzbicka E. [red.], CeDeWu, Warszawa 2011.

Niemiro W., *Teoria ryzyka w ubezpieczeniach*, www-users.mat.umk.pl/~wniem/Ryzyko/RyzykoUB.pdf [dostęp: 25.07.2017].

Norberg R., *Credibility Theory*, citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.593.8592&rep=rep1&type=pdf [dostęp: 25.07.2017].

20. Zob. np. R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, *Credibility theory*, [w:] *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston 2001, s. 163–166, a także: A. Szymańska, *Zastosowanie modelu Bühlmanna-Strauba do estymacji stawek składki netto w systemach bonus-malus ubezpieczeń odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych*, „Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska" 2016, vol. L, 4.

Schulz J., *Zakres pojęć „wyrównanie ryzyka" i „pokrycie ryzyka" w ubezpieczeniach*, „Studia Ubezpieczeniowe" 1975, tom 2.

Szekli R., *Matematyka ubezpieczeń majątkowych i osobowych*, skrypt do wykładu, www.math.uni.wroc.pl/~szekli/documents/mumio/mumio12/skrypt-12.pdf [dostęp: 25.07.2017].

Szymańska A., *Zastosowanie modelu Bühlmanna-Strauba do estymacji stawek składki netto w systemach bonus-malus ubezpieczeń odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych*, „Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska" 2016, vol. L, 4.

Credibility models – calculation of credibility premium in heterogeneous portfolios

One of the most important tasks of an insurance company is insurance premium calculation. Premium should be calculated in the way that allows to accumulate enough money for payout of the compensations, coverage of insurance company costs and profit. In order to calculate insurance premium in heterogeneous portfolios (using credibility theory) the policies are grouped into smaller homogenous portfolios. In practice, policies belong to one group if they meet the same assumptions (e.g. similar value and age of insured property, technical parameters, same sum insured, insurance coverage etc.). A credibility premium is a weighted average of an individual risk selected from a portfolio (based on small set of data) and class risk experience (based on a larger but less relevant set of data).

The aim of this article is to consider the issue of calculation of premium in heterogeneous portfolios and to present the application of credibility theory.

Key words: credibility theory, insurance premium calculation, insurance risk.

ANNA CHOJAN – studentka specjalności Zarządzanie Ryzykiem i Ubezpieczenia, Katedra Ubezpieczeń, Wydział Ekonomii, Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu.