

NORBERT DUCZKOWSKI

<https://doi.org/10.33995/wu2021.2.7>

## Zastosowanie rozkładu $\alpha$ -stabilnego do modelowania zmian cen ubezpieczeń

*Głównym celem niniejszej pracy jest zastosowanie rozkładu  $\alpha$ -stabilnego wraz z estymacją jego parametrów do opisu rozkładu empirycznego zmian wskaźników cen ubezpieczeń w Polsce. Rozkład  $\alpha$ -stabilny, choć powszechnie stosowany w finansach, nie jest bardzo powszechny w ubezpieczeniach, a jego stosowanie dotyczy raczej analizy ryzyka i zdarzeń ekstremalnych (ze względu na jego własności: „grube ogony”, leptokurtyczność) niż bezpośrednio cen ubezpieczeń. Z analizy literatury przedmiotu wynika, że ceny ubezpieczeń – które stanowią istotną determinantę popytu na ubezpieczenia – nie były dotąd przedmiotem badania w zakresie weryfikowalności możliwości stosowania rozkładu  $\alpha$ -stabilnego (w odróżnieniu do cen aktywów finansowych na różnych rynkach). W ramach niniejszej pracy dokonano estymacji parametrów rozkładu stabilnego zmian wskaźników cen ubezpieczeń w Polsce. Oszacowane parametry rozkładów pozwoliły na dobre dopasowanie dystrybucji do danych empirycznych, co zostało potwierdzone pozytywnymi wynikami testu Andersona-Darlinga. Badanie potwierdziło, że klasa rozkładów stabilnych może być bardzo użyteczna do opisu danych empirycznych w postaci finansowych szeregów czasowych, takich jak zmiany wskaźników cen ubezpieczeń w Polsce.*

**Słowa kluczowe:** ubezpieczenia, cena, rozkład stabilny.

### Wprowadzenie

Sektor ubezpieczeń, a wraz z nim produkty ubezpieczeniowe odgrywają bardzo ważną rolę w gospodarce. Zakłady ubezpieczeń nie tylko przejmują ryzyka, ale stanowią także istotne podmioty w zakresie inwestowania środków w ramach rezerw techniczno-ubezpieczeniowych czy rozwoju innowacji na światowych rynkach<sup>1</sup>. Jednym z kluczowych determinantów popytu na ubezpieczenia

---

1. A. Śliwiński, *Rola ubezpieczeń w gospodarce*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2019.

jest ich cena<sup>2</sup>, będąca immanentną cechą produktu ubezpieczeniowego. Analiza rozkładów zmian cen lub zmian wskaźników cen produktów ubezpieczeniowych może zatem dostarczyć bardzo wiele informacji na temat tego rynku oraz procesów, jakim podlegają ceny ubezpieczeń.

Większość modeli rynków finansowych zakłada, iż badane szeregi można scharakteryzować za pomocą rozkładu normalnego. Takie założenie jest związane bezpośrednio z centralnym twierdzeniem granicznym (suma niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach posiada, jako graniczny, rozkład normalny). Analizując dane empiryczne, stwierdzić można, że założenie o normalności dystrybucji finansowych szeregów czasowych bardzo często nie jest spełnione. Konkluzja ta stoi u podstaw formułowania wielu modeli procesów stochastycznych, odpowiadających na te braki. Stopy zwrotu z aktywów finansowych charakteryzują się bardzo często asymetrią oraz leptokurtycznością. Cechy te poddają w wątpliwość pełną przydatność modeli gaussowskich. Rozwiązaniem okazują się rozkłady uwzględniające wyszczególnione powyżej obserwacje empiryczne. Wymienić tu należy m.in. całą klasę rozkładów  $\alpha$ -stabilnych, która jest przedmiotem tego badania. I choć klasa rozkładów  $\alpha$ -stabilnych posiada istotne ograniczenie stosowania<sup>3</sup>, jakim jest niewątpliwie brak ściśle określonych postaci funkcji definiujących rozkłady stabilne (poza trzema przypadkami: rozkładu Cauchy'ego, Lévy'ego oraz Gaussa), to mimo wszystko są one bardzo użyteczne do opisu danych empirycznych finansowych szeregów czasowych.

Głównym celem niniejszej pracy jest właśnie zastosowanie rozkładu  $\alpha$ -stabilnego wraz z estymacją jego parametrów do opisu rozkładu empirycznego zmian wskaźników cen ubezpieczeń w Polsce, co *explicite* zapisać można jako hipotezę badawczą:

**H1: Zmiany wskaźników cen ubezpieczeń w Polsce podlegają rozkładowi  $\alpha$ -stabilnemu.**

Rozkład  $\alpha$ -stabilny, choć powszechnie stosowany w finansach, nie jest bardzo powszechny w ubezpieczeniach, a jego wykorzystanie dotyczy raczej analizy ryzyka i zdarzeń ekstremalnych (ze względu na jego własności) niż bezpośrednio cen ubezpieczeń. Z analizy literatury przedmiotu wynika, że ceny ubezpieczeń nie były dotąd przedmiotem badania w zakresie weryfikowalności możliwości stosowania rozkładu  $\alpha$ -stabilnego. Z tego powodu niniejsze badanie może być uznane za unikalny wkład do rozwoju nauki o finansach (ubezpieczeniach). Weryfikacja empirycznej funkcji rozkładu zmian wskaźników cen ubezpieczeń stanowi bowiem bazę do modelowania wpływu zmiany cen na inne parametry rynku.

## 1. Rozkład $\alpha$ -stabilny

Rozkłady  $\alpha$ -stabilne, nazywane także po prostu stabilnymi lub stabilnymi rozkładami Lévy'ego<sup>4</sup>, to bogata klasa rozkładów statystycznych, która dopuszcza w swojej konstrukcji takie cechy jak

- 
2. E.N. Zietz, *An examination of demand for life insurance*, "Risk Management and Insurance Review" 2003, Vol. 6, No. 2, 159–191.
  3. J.P. Nolan, *Stable Distributions Models for Heavy Tailed Data*, <https://edspace.american.edu/jpnolan/wp-content/uploads/sites/1720/2020/09/Chap1.pdf> [dostęp: 22.02.2021].
  4. H. Basegmez, E. Cekici, *Financial applications of stable distributions: implications on Turkish stock market*, "Journal of Business, Economics and Finance" 2017, Vol. 6, Issue 4, p. 364–374.

„ciężkie ogony”, smukłość większą niż wynikałoby to bezpośrednio z krzywej dzwonowej lub nawet asymetrię (skośność) zmiennych losowych<sup>5</sup>. Klasę tą wprowadził w latach 20. XX w. Paul Levy w swoich badaniach zachowania sum niezależnych zmiennych losowych<sup>6</sup>.

W literaturze przedmiotu spotka się zazwyczaj dwie definicje stabilności<sup>7</sup>. Pierwsza z nich dotyczy stabilności sumy zmiennych losowych i przytaczana jest w postaci twierdzenia granicznego. Druga opiera się na funkcji charakterystycznej rozkładu stabilnego. Zgodnie z tą definicją rozkład niezdegenerowany jest rozkładem stabilnym, jeśli posiada odpowiednią funkcję charakterystyczną<sup>8,9</sup>.

Definiowanie rozkładu stabilnego przez twierdzenie graniczne pozwala wskazać, że rozkład sumy realizacji zmiennych losowych będących realizacją pewnej zmiennej ma taki sam rozkład co ta zmienna, z zastrzeżeniem skali i przesunięcia. Cecha ta jest bardzo istotna z punktu widzenia zmiennych addytywnych w finansach. Pozwala bowiem określić, że rozkłady stabilne są „atraktorami” dla odpowiednio zeskalowanych sum niezależnych zmiennych losowych pochodzących z tego samego rozkładu<sup>10,11</sup>. Z kolei definicja rozkładu stabilnego przez równania zawarte w tab. 1 pozwala na numeryczne wyznaczenie/symulację rozkładów empirycznych<sup>12,13</sup>. Brak postaci analitycznej funkcji gęstości prawdopodobieństwa i definiowanie rozkładu poprzez funkcję charakterystyczną to główne wady stosowania stabilnych rozkładów (z wyjątkiem rozkładów Cauchy’ego, Lévy’ego oraz Gaussa)<sup>14</sup>. Niemniej jednak rozwój metod numerycznych pozwala na wykorzystanie stabilnych rozkładów z oszacowanymi parametrami w różnych praktycznych problemach<sup>15</sup>, czego przykładem może być niniejsze badanie. Z definicji rozkładu stabilnego poprzez jego funkcję charakterystyczną stwierdzić można, że używając określenia *rozkład stabilny*, w praktyce mówimy o całej rodzinie ciągłych rozkładów czteroparametrycznych<sup>16</sup>. Dopiero dopasowanie określonych parametrów pozwala mówić o pojedynczym rozkładzie.

Ponieważ celem niniejszej pracy nie jest pełne omawianie wszystkich własności klasy rozkładów stabilnych, a próba ich zastosowania praktycznego z wykorzystaniem metod numerycznych dostępnych w pakiecie R-Studio, poniżej przedstawiono podsumowanie podstawowych własności rozkładu stabilnego (tab. 1.).

5. J.P. Nolan, *op. cit.*

6. M. Kateregga, S. Mataramvura, D. Taylor, *Parameter estimation for stable distributions with application to commodity futures log-returns*, “Cogent Economics & Finance” 2017.

7. J.P. Nolan, *op. cit.*

8. *Ibidem.*

9. H. Basegmez, E. Cekici, *op. cit.*

10. J.P. Nolan, *op. cit.*

11. H. Basegmez, E. Cekici, *op. cit.*

12. *Ibidem.*

13. Sz. Borak, W. Härdle, R. Weron, “Stable Distributions, SFB 649 Discussion Paper” 2005–008, Berlin 2005.

14. J.P. Nolan, *op. cit.*

15. J.P. Nolan, [1997]. *Numerical calculation of stable densities and distribution functions*. *Communications in Statistics*, “Stochastic Models” 1997, No. 13, p. 759–774.

16. J.P. Nolan, *Stable Distributions...*

Tabela 1. Zestawienie wybranych własności rozkładu stabilnego

Cechy rozkładu stabilnego	Wartość cech rozkładu stabilnego
Funkcja charakterystyczna	$f(x; \alpha; \beta; c; \mu) = \begin{cases} \exp\{ix\mu -  cx ^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sgn}(x) \tan(\frac{\pi\alpha}{2})]\} & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ \exp\{ix\mu -  cx ^\alpha [1 - i\beta \operatorname{sgn}(x) (-\frac{2}{\pi} \log x )]\} & \text{dla } \alpha = 1 \end{cases}$ <p>gdzie: parametr stabilności: <math>\alpha, \alpha \in [0, 2]</math>, parametr skośności: <math>\beta, \beta \in [-1, 1]</math>, parametr skali <math>c, c \in [0, \infty)</math>, parametr lokalizacji: <math>\mu, \mu \in [-\infty, \infty)</math>, <math>\operatorname{sgn}(x)</math> funkcja określona wzorem:</p> $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$
Funkcja generująca momenty	Niezdefiniowana, poza przypadkiem, gdy $\alpha=2$ , wtedy $\exp\{\mu x + c^2 x^2\}$
Funkcja rozkładu	$f(x; \alpha; \beta; c; \mu)$ Brak postaci analitycznej, poza przypadkami szczególnymi dla wybranych parametrów
Parametry	Parametr stabilności: $\alpha, \alpha \in [0, 2]$ , Parametr skośności: $\beta, \beta \in [-1, 1]$ , Parametr skali $c, c \in [0, \infty)$ , Parametr lokalizacji: $\mu, \mu \in [-\infty, \infty)$
Przypadki szczególne funkcji rozkładu	$f(x; \alpha=2; \beta=0; c=1; \mu=0)$ - rozkład Gaussa $f(x; \alpha=1; \beta=0; c=1; \mu=0)$ - rozkład Levy'ego $f(x; \alpha=1; \beta=1; c=1; \mu=0)$ - rozkład Cauchy'ego
Dystrybuanta	Brak postaci analitycznej, poza przypadkami szczególnymi dla wybranych parametrów
Średnia	Niezdefiniowana, poza przypadkiem, gdy $\alpha > 1$ , wtedy średnia wynosi $\mu$
Mediana	Niezdefiniowana, poza przypadkiem, gdy $\beta = 0$ , wtedy mediana wynosi: $\mu$
Dominanta	Niezdefiniowana, poza przypadkiem, gdy $\beta = 0$ , wtedy Dominanta wynosi: $\mu$
Wariancja	Niezdefiniowana, poza przypadkiem, gdy $\alpha = 2$ , wtedy Wariancja wynosi: $2c^2$
Skośność	Niezdefiniowana, poza przypadkiem, gdy $\alpha = 2$ , wtedy Skośność wynosi: 0

Źródło: opracowanie własne na podstawie: J.P. Nolan, *Stable Distributions Models for Heavy Tailed Data*, <https://edspace.american.edu/jpnolan/wp-content/uploads/sites/1720/2020/09/Chap1.pdf> [dostęp: 22.02.2021]; H. Basegmez, E. Cekici, *Financial applications of stable distributions: implications on Turkish stock market*, "Journal of Business, Economics and Finance" 2017, Vol. 6, Issue 4; M. Kateregga, S. Mataramvura, D. Taylor, *Parameter estimation for stable distributions with application to commodity futures log-returns*, "Cogent Economics & Finance" 2017; M. Łażewski, K. Zator, *Wykorzystanie metod analitycznych do wyznaczenia wielowymiarowych rozkładów alfa-stabilnych rozkładów prawdopodobieństwa*, „Acta Universitatis Lodzianensis. Folia Oeconomica” 2004, nr 177.

## 2. Rozkłady $\alpha$ -stabilne – przegląd literatury

Ze względu na szeroki zakres stosowania grupa rozkładów stabilnych była przedmiotem wielu badań i artykułów naukowych. Publikacje te miały bardzo różny charakter i dotyczyły wielu aspektów statystyki czy ekonometrii – zarówno w wymiarze praktycznym, jak i teoretycznym.

W obszarze praktycznego zastosowania rozkładów stabilnych wskazać tu należy cały szereg zastosowań<sup>17</sup>, od inżynierskich (przetwarzanie sygnałów przez radary, przetwarzanie obrazu, zależności sygnałów telekomunikacyjnych, akustyka (w tym sonar i ultradźwięki), teoria sieci komputerowych, teoria kolejowania), poprzez zastosowania w fizyce (ułamkowe / anomalne

17. J.P. Nolan, *Bibliography on stable distributions, processes and related topics*, <https://edspace.american.edu/jpnolan/wpcontent/uploads/sites/1720/2020/11/StableBibliography.pdf> [dostęp: 22.02.2021].

dyfuzje i turbulencje, układy dynamiczne, teoria ergodyczna, równania rekurencji stochastycznej), na zastosowaniach w medycynie, chemii, geologii czy biologii i genetyce kończąc. Nic więc dziwnego, że grupa rozkładów stabilnych znalazła też cały szereg zastosowań w dziedzinie szeroko rozumianej ekonomii oraz finansów.

Główną motywacją do zastosowania rozkładów stabilnych w ekonomii i finansach jest wspomniany już na wstępie fakt, że rozkłady empiryczne stóp zwrotu mają co do zasady „cięższe ogony” niż przewiduje tak powszechnie wykorzystywany rozkład Gaussa<sup>18,19</sup>. Drugim, nie mniej istotnym czynnikiem determinującym wybór rozkładu stabilnego jest jego własność pozwalająca na modelowanie skumulowanych zwrotów przy zastosowaniu stabilności sum<sup>20</sup>. Oznacza to, że jeśli dana zmienna podlega rozkładowi stabilnemu, to jej suma za  $n$  okresów również ma rozkład stabilny<sup>21</sup>.

Badanie zastosowań stabilnych dystrybucji w szeroko rozumianej ekonomii i finansach ma sunkowo długą historię. Już bowiem na przełomie lat 50. i 60. XX w. Mandelbrot<sup>22,23,24</sup> zaproponował podejście, które zrewolucjonizowało sposób, w jaki ekonomiści postrzegali i interpretowali ceny na rynkach<sup>25</sup>. Jego hipoteza, że ceny aktywów nie są gaussowskie, legła u podstaw prac nad rozkładami stabilnymi a także posłużyła do weryfikacji hipotez ich stosowalności na rynkach. Nie bez znaczenia dla rozkwitu badań nad rozkładami stabilnymi były prace Zolotareva<sup>26,27</sup> i Dumouchela<sup>28</sup>. Pierwszy z nich opracował integralne reprezentacje stabilnych praw, drugi zaś wykorzystywał tę klasę rozkładów do wnioskowania statystycznego<sup>29</sup>.

Analizując literaturę dotyczącą zastosowania rozkładów stabilnych w ekonomii i finansach, stwierdzić można, że najwięcej prac skupia się na zastosowaniu rozkładów stabilnych do modelowania rozkładów zwrotów z aktywów<sup>30</sup>. Są wśród nich także publikacje rozszerzające stosowanie stabilnych dystrybucji na model CAPM<sup>31</sup> czy takie instrumenty finansowe jak CDO [*Collateralized Debt Obligation*]. Prace te dotyczą zarówno rynku giełdowego, jak i rynku energii, towarowego,

18. *Ibidem*.

19. D. Krężolek, *Metody aproksymacji indeksu ogona rozkładów alfa-stabilnych na przykładzie GPW w Warszawie*, „Studia Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach” 2013, nr 162, s. 21–30.

20. J.P. Nolan, *Bibliography...*

21. J.P. Nolan, *Stable Distributions...*

22. B. Mandelbrot, *Variables et processus stochastiques de pareto-Lévy et la répartition des revenus*, „Comptes Rendus de l'Académie des Sciences” 1959, No. 249, p. 2153–2155.

23. B. Mandelbrot, *Paretian distributions and income maximization*, „The Quarterly Journal of Economics” 1962, No. 76, p. 57–85.

24. B. Mandelbrot, *The variation of certain speculative prices*, „The Journal of Business” 1963, No. 36, p. 394–419.

25. M. Katerega, S. Mataramvura, D. Taylor, *op. cit.*

26. V.M. Zolotarev, *Statistical estimates of the parameters of stable laws*, „Banach Center Publications” 1980, No. 6, p. 359–376.

27. V.M. Zolotarev, *One-dimensional Stable Distributions*, Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI 1986.

28. W.H. Dumouchel, *Stable distributions in statistical inference*, „The Journal of the American Statistical Association” 1971, No. 78, p. 469–477.

29. M. Katerega, S. Mataramvura, D. Taylor, *op. cit.*

30. J.P. Nolan, *Bibliography...*

31. *Ibidem*.

nieruchomości<sup>32</sup> oraz rynku walutowego (w tym kryptowalut). Nie brak również opracowań przekładających rozkłady stabilne aktywów bazowych na rynek instrumentów pochodnych i ich wyceny. O szerokiej możliwości stosowania rozkładów stabilnych w finansach świadczyć może także fakt, że zdarzają się badania<sup>33</sup> wykazujące, że nawet skrajna zmienność przychodów z filmów w Hollywood może być modelowana za pomocą rozkładów stabilnych. Syntetyczną agregację wybranych badań w zakresie zastosowania rozkładu stabilnego w ekonomii i finansach, przygotowaną na podstawie pracy profesora Nolana<sup>34</sup>, zawiera tab. 2.

Tabela 2. Zestawienie wybranych badań w zakresie zastosowania rozkładu stabilnego w ekonomii i finansach

Tematyka badawcza	Wybrani autorzy wraz z datą publikacji pracy związanej z rozkładem stabilnym i jego zastosowaniem w finansach
Rynek giełdowy	Rachev and Mittnik [2000], Nolan [2003], Mandelbrot [1960], Mandelbrot [1961], Mandelbrot [1963], Rachev [2003], McCulloch [1996], McCulloch [1997], Bidarkota and McCulloch [1998], Peters [1994], Walter [1999], Belkacem [2000], Haas [2005], Lombardi and Calzolari [2005], Ortobelli and Rachev [2005], Borak [2005], Martin [2006], Frain [2007], Frain [2009], Kozubowski [2003], Dominicy [2010], Hardy [2003], Kaplan [2012]
Wycena opcji	McCulloch [1996a], Carr and Wu [2003], Cartea and Howison [2003], Cartea and Howison [2007], Vollert [2001], Hurst [1999], Hauksson and Rachev [2001]
Analiza ryzyka (VAR)	Khindanova [2001], Lamantia [2006], Sy [2006], Marinelli [2006], Frain [2008], Frain [2009]
Rynek walutowy oraz kryptowaluty	Bastereld [2003], Bastereld [2005], Bastereld [2005], Fofack and Nolan [2001], Lan and Tan [2007], Zhao and Wu [2009], Kakinaka and Umeno [2020]
Rynek nieruchomości	King and Young [1994], Young and Gra [1995], Gra [1997], Brown [2000], Brown [2004], Brown [2005], Young [2006], Young [2008]
Rynek towarowy	Weron [2005], Jin [2005], Weron [2006], Chinghamu [2015], Gnunay and Khaki [2018], Rodriguez-Aguilar [2019], Rodriguez Aguilar [2020]
Ubezpieczenia	Asmussen, S., H. Schmidli, and V. Schmidt [1997], Embrechts, P., C. Kluppelberg, and T. Mikosch [1997]
Pozostałe	De Vany and Walls [1999], De Vany and Walls [2004a] De Vany [2003], Walls [2005]

Źródło: J.P. Nolan, *Bibliography on stable distributions, processes and related topics*, <https://edpspace.american.edu/jpnolan/wpcontent/uploads/sites/1720/2020/11/StableBibliography.pdf> [dostęp: 22.02.2021].

Rozkład stabilny może mieć także zastosowanie w ubezpieczeniach, jednak na podstawie tab. 2. oraz pracy<sup>35</sup> profesora Nolana stwierdzić można, że jego użycie w tej dziedzinie finansów nie jest powszechne (mała liczba prac) i dotyczy raczej analizy ryzyka i zdarzeń ekstremalnych<sup>36,37</sup> niż bezpośrednio cen ubezpieczeń. Z analizy literatury przedmiotu wynika zatem, że ceny ubezpieczeń

32. *Ibidem*.

33. W.D. Walls, *Modeling movie success when Nobody Knows Anything: Conditional stable-distribution analysis of film returns*, "Journal of Cultural Economics" 2005, No. 29, p. 177–190.

34. J.P. Nolan, *Bibliography*...

35. *Ibidem*.

36. S. Asmussen, H. Schmidli, V. Schmid, *Tail probabilities for nonstandard risk and queueing processes with subexponential jumps*, "Advances in Applied Probability" 1999, Vol. 31, Issue 2, p. 422–447.

37. P. Embrechts, C. Kluppelberg, T. Mikosch, *Modelling Extreme Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag Berlin 1997.

nie były dotąd przedmiotem badania w zakresie weryfikowalności możliwości stosowania rozkładu stabilnego.

### 3. Ceny ubezpieczeń jako istotny element determinujący popyt

Ze względu na znaczącą rolę ubezpieczeń w gospodarce<sup>38,39</sup> kluczowe determinanty popytu na ubezpieczenia były przedmiotem wielu prac badawczych. Autorzy dokonywali swoich badań w różnych przekrojach: czasowych, geograficznych, społecznych oraz gospodarczych<sup>40,41</sup>. Analizie poddawane były także różne typy ubezpieczeń, zarówno ubezpieczenia na życie, jak i majątkowe<sup>42</sup>. Z badań tych wynika, że do kluczowych determinant popytu na ubezpieczenia należy ich cena.

Jednym z pierwszych badań dotyczących znaczenia wpływu ceny na popyt na ubezpieczenia była praca Mantis i Farmer z 1968 roku<sup>43</sup>. W artykule opublikowanym w "The Journal of Risk and Insurance" analizowali oni możliwości tworzenia dość złożonych, wielozmiennych prognoz popytu na ubezpieczenia na życie. Ich celem było wskazanie, że można sporządzić dobrą prognozę popytu na podstawie łatwo dostępnych danych. Jako zmienne wykorzystali oni relatywną cenę ubezpieczeń na życie, liczbę małżeństw, liczbę urodzeń, dochód osobisty oraz zatrudnienie. Autorzy eksperymentowali z różnymi kombinacjami tych i innych zmiennych, ale wskazany wyżej zestaw okazał się najdokładniejszym prognozą.

Przyglądając się dotychczasowym badaniom dotyczącym cen ubezpieczeń, nie sposób nie wspomnieć o pracy Davida Babbela z 1985 roku<sup>44</sup>. W swoim opracowaniu stworzył on indeks cen realnych dla ubezpieczeń sprzedawanych w Stanach Zjednoczonych od 1953 do 1979 roku. Wykazał, że badane typy ubezpieczeń wykazywały negatywny związek ze zmianami tego wskaźnika kosztów. Innymi słowy, popyt na ubezpieczenia był silnie zależny od ich ceny. Autor wskazał jednocześnie, że istnienie silnej elastyczności cenowej popytu na badane ubezpieczenia nie gwarantuje wysokiego stopnia konkurencji cenowej w branży ubezpieczeniowej.

Do klasycznych pozycji literatury przedmiotu analizujących wpływ cen na popyt na ubezpieczenia zalicza się także publikacja Petera Fortune'a z 1973, wydrukowana w "The Journal of Finance"<sup>45</sup>. W swojej pracy badawczej skupił się on na weryfikacji hipotezy oczekiwanej użyteczności wyboru w warunkach niepewności. Empiryczne implikacje hipotezy o oczekiwanej użyteczności dla popytu

38. D. Ward, R. Zurbrugg, *Does Insurance Promote Economic Growth? Evidence from OECD Countries*, "The Journal of Risk and Insurance" 2000, Vol. 67, No. 4.

39. A. Śliwiński, *Popyt na ubezpieczenia na życie – przegląd badań światowych*, [w:] S. Nowak, A.Z. Nowak, A. Sopoćko, *Polski rynek ubezpieczeń na tle kryzysów społeczno-gospodarczych*, Wydawnictwo Naukowe Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2016.

40. E.N. Zietz, *An examination...*

41. J.F. Outreville, *The relationship between insurance and economic development: 85 empirical papers for a review of the literature*, "Risk Management and Insurance Review" 2013, Vol. 16, No. 1.

42. S.L. Dragos, *Life and non-life insurance demand: the different effects of influence factors in emerging countries from Europe and Asia*, "Economic Research – Ekonomska Istraživanja" 2014, Vol. 27, No. 1.

43. G. Mantis, R.N. Farmer, *Demand for life insurance*, "The Journal of Risk and Insurance" 1968, Vol. 35, No. 2.

44. D.F. Babel, *The Price Elasticity of Demand for Whole Life Insurance*, "The Journal of Finance" 1985, Vol. 40, No. 1.

45. P. Fortune, *A Theory of Optimal Life Insurance: Development and Test*, "The Journal of Finance" 1973, Vol. 28, No. 3.

na ubezpieczenia testowane były w ramach jego badań za pomocą analizy regresji wielokrotnej z wykorzystaniem danych z lat 60. XX wieku. Otrzymane przez niego wyniki są zgodne z hipotezą oczekiwanej użyteczności, która pozwala wskazać odpowiednią cenę ubezpieczenia, jaką klient będzie skłonny zapłacić.

Wpływ cen na popyt na ubezpieczenia na życie był także przedmiotem badań Marka J. Browne'a oraz Kihonga Kima<sup>46</sup>. W poświęconym temu tematowi artykule zidentyfikowali oni czynniki, które prowadzą do różnic w popycie na ubezpieczenia na życie w różnych krajach. W pracy tej stwierdzono m.in., że ważnymi czynnikami są: dochód narodowy, wydatki rządowe na ubezpieczenie społeczne, inflacja oraz ceny ubezpieczenia.

Oczywiście powyższe badania nie wyczerpują literatury przedmiotu, a stanowią jedynie przykłady odnotowania znaczenia wpływu cen na popyt na ubezpieczenia. Wprawdzie w zdecydowanej większości dotyczą one ubezpieczeń na życie, to jednak podobne badania można znaleźć także w zakresie innych typów ubezpieczeń. Przykłady takich prac zostały przywołane w opracowaniu Johanna G. Jaspersena<sup>47</sup> a także w zestawieniu Mihaeli David<sup>48</sup>, która dokonała przeglądu koncepcji teoretycznych oraz literatury w zakresie wycen ubezpieczeń innych niż ubezpieczenia na życie. Jej opracowanie miało na celu przedstawienie teoretycznych aspektów ubezpieczeń majątkowych, z naciskiem na zdefiniowanie podstawowych koncepcji stosowanych do określenia ceny ubezpieczenia, jako jednego z kluczowych parametrów produktu ubezpieczeniowego, zawierającego w sobie wycenę ryzyka.

Powyższe prace badawcze wskazują na znaczenie ceny w całościowym opisie ubezpieczeń, zarówno w kontekście decyzji zakupowych, jak również wyceny ryzyka. Dały one również asumpt do powstania niniejszej pracy, której celem jest zastosowanie rozkładu  $\alpha$ -stabilnego do opisu rozkładu empirycznego zmian wskaźników cen ubezpieczeń w Polsce. Znając bowiem rozkłady, jakim podlegają wskaźniki zmian cen ubezpieczeń, można w stosunkowo łatwy sposób modelować wpływ zmiany ceny na inne parametry rynku, takie jak: przypis składki ubezpieczeniowej, poziom rezerw techniczno-ubezpieczeniowych czy rentowność całego sektora.

## 4. Baza danych i metoda badawcza

Do badania wykorzystano dane miesięczne za okres od stycznia 2005 do grudnia 2020 roku, dotyczące wskaźników cen ubezpieczeń, publikowane przez Główny Urząd Statystyczny (GUS). Źródło danych należy do najbardziej wiarygodnych w Polsce. Analizie poddano dwie grupy szeregów czasowych. Pierwsza grupa obejmowała szereg czasowy wskaźników opisanych stosunkiem wartości ceny ubezpieczenia w miesiącu  $m$  roku  $r$ , do wartości ceny ubezpieczenia w analogicznym miesiącu rok wcześniej  $[r-1]$ , tzw. wskaźnik  $r/r$ , co można wyrazić za pomocą formuły

---

46. M.J. Browne, K. Kim, *An International Analysis of Life Insurance Demand*, "The Journal of Risk and Insurance" 1993, Vol. 60, No. 4.

47. J.G. Jaspersen, *Hypothetical Surveys and Experimental Studies of Insurance Demand: A Review*, "The Journal of Risk and Insurance" 2016, Vol. 83, No. 1.

48. M. David, *A review of theoretical concepts and empirical literature of non-life insurance pricing*, "Procedia Economics and Finance" Vol. 20, 7<sup>th</sup> International Conference on Globalization and Higher Education in Economics and Business Administration, GEBA 2013.



$$INDEX_i = P(m;r) / P(m;r-1) \quad (1)$$

gdzie:  $r$  – rok,  $m$  – miesiąc,  $P$  – cena ubezpieczenia (średnia cen zaobserwowanych przez GUS),  $i$  –  $i$ -ta obserwacja w szeregu czasowym

Druga zaś grupa wskaźników obejmowała szereg czasowy stosunku wartości ceny ubezpieczenia w miesiącu  $m$ , do wartości ceny ubezpieczenia w miesiącu wcześniejszym ( $m-1$ ), tzw. wskaźnik  $m/m$ , co można wyrazić za pomocą formuły

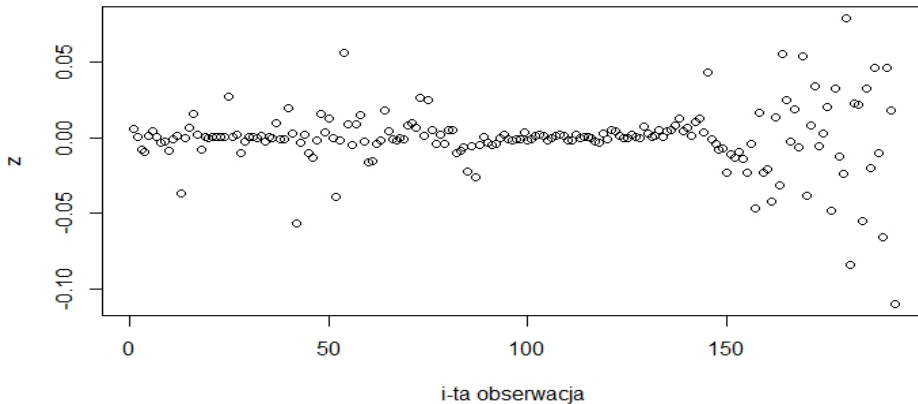
$$INDEX_i = P(m) / P(m-1) \quad (2)$$

Dwa szeregi czasowe, o których mowa powyżej, przekształcono zgodnie z formułą opisaną wzorem (3), otrzymując w ten sposób zmienną  $z$ , równą różnicy logarytmów wskaźników (indeksów) cen ubezpieczeń z dwóch kolejnych okresów. Obliczenia wykonano zarówno dla tzw. wskaźników  $r/r$  jak i  $m/m$ , otrzymując dwa szeregi czasowe.

$$z_i = \ln \left( \frac{INDEX(i)}{INDEX(i-1)} \right) = \ln(INDEX(i)) - \ln(INDEX(i-1)) \quad (3)$$

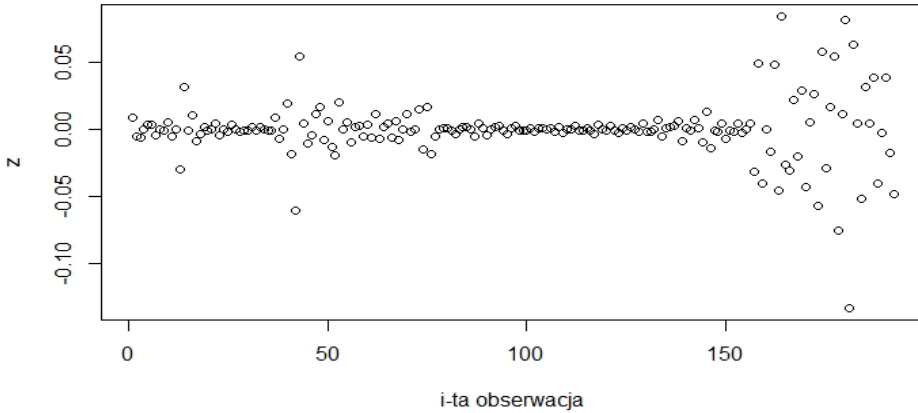
Wyznaczoną w ten sposób zmienną  $z$ , zaprezentowano na poniższych wykresach.

Wykres 1. Wartości zmiennej  $z$  wyznaczone dla wskaźników rocznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m;r) / P(m;r-1)$  za okres od stycznia 2005 do grudnia 2020



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Wykres 2. Wartości zmiennej z wyznaczone dla wskaźników miesięcznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m)/P(m-1)$  za okres od stycznia 2005 do grudnia 2020



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Następnie przy pomocy pakietu R-Studio<sup>49</sup> (funkcja *stableFit()* w bibliotece *fBasics*) dokonano dopasowania rozkładu stabilnego i wyznaczenia jego parametrów. Po wyznaczeniu parametrów rozkładu stabilnego:  $\alpha$ ;  $\beta$ ;  $c$ ;  $\mu$  dokonano weryfikacji hipotezy w zakresie dopasowania rozkładu o określonych parametrach do danych empirycznych. Weryfikacja wykonywana była przy użyciu testu statystycznego Andersona-Darlinga także dostępnego w R-Studio (funkcja *ad.test()* w bibliotece *ADGofTest*). Test Andersona-Darlinga jest testem statystycznym sprawdzającym, czy próbka danych pochodzi z określonego rozkładu prawdopodobieństwa. Zwraca on wartość statystyki testującej *AD* oraz wartość *p-value*. W przypadku gdy wartość *p-value* jest większa od 0,05, nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, iż dany rozkład empiryczny podlega rozkładowi testowanemu. Jeżeli jednak *p-value* jest mniejsze od 0,05, hipotezę, iż dany rozkład empiryczny podlega rozkładowi testowanemu, należy odrzucić (przy zachowaniu 95-procentowego poziomu ufności). Wyniki obliczeń i dopasowania rozkładu teoretycznego do empirycznego przedstawiano w rozdziale 5.

Wskaźniki cen ubezpieczeń użyte do niniejszego badania, a publikowane przez GUS w ramach wyznaczania wskaźnika CPI (*Consumer Price Index*), obejmują swoim zakresem bardzo szeroką i całkowicie niejednorodną grupę ubezpieczeń. Zawiera ona bowiem ubezpieczenia związane z mieszkaniem (ubezpieczenia nieruchomości od ognia, zalania, odpowiedzialności cywilnej czy kradzieży), ubezpieczenia zdrowotne, ubezpieczenia pojazdów mechanicznych (odpowiedzialności cywilnej, *auto casco*, *assistance*) oraz pozostałe ubezpieczenia.<sup>50</sup> Ze wskaźnika wyłączone są ubezpieczenia na życie. Niejednorodność wskaźnika z jednej strony ogranicza możliwości prognostyczne, gdyż zawiera on zarówno ubezpieczenia działu I, jak i z działu II, które mają zupełnie inną specyfikę. Z drugiej zaś strony jego kompleksowość i syntetyczność, a także fakt, że uwzględnia on najbardziej popularne ubezpieczenia, powoduje, że jego obserwacja może stanowić swoisty

49. Linki do opisów zastosowanych w badaniu pakietów R zamieszczono w wykazie źródeł.

50. EUROSTAT, RAMON (*Reference And Management Of Nomenclatures*), *European Classification of Individual Consumption according to Purpose adapted to the needs of the Harmonised Indices of Consumer Prices*, linki zamieszczono w wykazie źródeł.

barometr rynku ubezpieczeniowego. Z tego też względu analiza rozkładu zmiennej  $z$ , określonej wzorem (3), może dostarczyć istotnych informacji na temat zmian cen na tym rynku.

## 5. Wyniki

Podstawowe statystyki opisowe wyznaczone dla rozkładów empirycznych wartości zmiennej  $z$ , obliczonej zarówno dla wskaźników miesięcznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m)/P(m-1)$ , jak i dla wskaźników rocznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m;r)/P(m;r-1)$  za okres od stycznia 2005 do grudnia 2020 roku przedstawia tab. 2. Na jej podstawie, a także na podstawie wyk. 3. i 4., prezentujących m.in. empiryczne funkcje gęstości prawdopodobieństwa, widać wyraźnie, że zarówno dla wskaźników rocznych, jak i miesięcznych rozkłady zmiennej  $z$  charakteryzują się bardziej smukłym kształtem (w stosunku do rozkładu normalnego) i większą ilością obserwacji skoncentrowanych wokół zera. Warto także podkreślić, że porównując rozkład zmiennej  $z$  do rozkładu normalnego, można zaobserwować występowanie większej ilości obserwacji z ogonów rozkładu (tzw. „grube ogony”), co przedstawiono na wyk. 7. oraz wyk. 8. Godne odnotowania są też wyraźne różnice między rozkładami empirycznymi zmiennej  $z$  wyznaczonej dla wskaźników miesięcznych i rocznych. Widać wyraźnie – na podstawie danych z tab. 2. – że rozkład empiryczny wskaźników miesięcznych charakteryzuje się mniejszym rozrzutem (jest bardziej smukły) oraz występowaniem mniejszych wartości skrajnych. Różnice te będą miały wpływ na nieznaczące różnice w szacowanych parametrach rozkładu stabilnego  $f(z; \alpha; \beta; c; \mu)$ .

Tabela 3. Podstawowe statystyki opisowe rozkładów empirycznych zmian cen ubezpieczeń

Nazwa parametru	Statystyki opisowe dla rozkładów empirycznych $z$	
	$z = \ln [P(m;r)/P(m;r-1)]$	$z = \ln [P(m)/P(m-1)]$
Minimum	-0.1097012	-1.330e-01
I Kwartyl	-0.0039594	-3.481e-03
Mediana	+0.0001904	-9.959e-05
Średnia	-0.0005722	-1.835e-04
III Kwartyl	+0.0044754	+3.979e-03
Maksimum	+0.0788265	+8.424e-02
Odchylenie standardowe	+0.0206080	+0.0220201
Skośność	-0.8876033	-0.7076872
Kurtoza	+9.868544	+12.46378

Źródło: opracowanie własne.

Zgodnie z opisem zawartym w rozdziale 4. dokonano dopasowania rozkładu stabilnego i wyznaczenia jego parametrów dla funkcji  $f(z; \alpha; \beta; c; \mu)$ . Wartości tych parametrów, wyznaczone dla rozkładów empirycznych wartości zmiennej  $z$  obliczonej zarówno dla wskaźników miesięcznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m)/P(m-1)$ , jak i dla wskaźników rocznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m;r)/P(m;r-1)$ , przedstawia tab. 3., a zależność stabilności kwantyli od parametrów dopasowanego rozkładu stabilnego ( $\alpha$  i  $\beta$ ) przedstawiono na wyk. 5. i 6.

Tabela 4. Zestawienie oszacowanych parametrów rozkładu stabilnego

Nazwa parametru	Oszacowane parametry funkcji rozkładu stabilnego $f(z; \alpha; \beta; c; \mu)$	
	$z = \ln [P(m;r)/P(m;r-1)]$	$z = \ln [P(m)/P(m-1)]$
$\alpha$	0.9100000000	8.310000e-01
$\beta$	-0.1470000000	-8.300000e-02
$c$	0.0040895748	3.578446e-03
$\mu$	0.0003946311	-1.850799e-05

Źródło: opracowanie własne.

Po wyznaczeniu parametrów rozkładu stabilnego ( $\alpha; \beta; c; \mu$ ) wskazanych w tab. 4. dokonano weryfikacji hipotezy w zakresie dopasowania wyznaczonego rozkładu do danych empirycznych. Weryfikacja wykonywana była przy użyciu testu statystycznego Andersona- Darlinga (ADF), a jej wynik został przedstawiony w tab. 5. Wartość *p-value* w obu przypadkach jest znacząco większa od 0,05, zatem nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy mówiącej, że rozkład zmiennej  $z$  (zmian wskaźnika cen ubezpieczeń) jest rozkładem stabilnym o parametrach wskazanych w tab. 4.

Tabela 5. Wyniki testu Andersona-Darlinga dla wyznaczonych funkcji rozkładu  $f(z; \alpha; \beta; c; \mu)$ 

Nazwa parametru	Wyniki testu ADF dla dopasowania oszacowanych funkcji rozkładu stabilnego $f(z; \alpha; \beta; c; \mu)$ do danych empirycznych	
	$z = \ln [P(m;r)/P(m;r-1)]$	$z = \ln [P(m)/P(m-1)]$
Hipotezy	$H_0$ : rozkład zmiennej $z$ jest rozkładem stabilnym $f(z; \alpha; \beta; c; \mu)$ , gdzie parametry $f()$ są zgodne z tab. 4 $H_A$ : rozkład zmiennej $z$ nie jest rozkładem stabilnym $f(z; \alpha; \beta; c; \mu)$ , gdzie parametry $f()$ są zgodne z tab. 4.	$H_0$ : rozkład zmiennej $z$ jest rozkładem stabilnym $f(z; \alpha; \beta; c; \mu)$ , gdzie parametry $f()$ są zgodne z tab. 4. $H_A$ : rozkład zmiennej $z$ nie jest rozkładem stabilnym $f(z; \alpha; \beta; c; \mu)$ , gdzie parametry $f()$ są zgodne z tab. 4.
AD	0.75792	0.73737
p-value	0.5122	0.5282
Komentarz	Brak podstaw do odrzucenia $H_0$ .	Brak podstaw do odrzucenia $H_0$ .

Źródło: opracowanie własne. Analogiczne statystyki testujące hipotezę o normalności rozkładu danych empirycznych wynoszą odpowiednio dla zmiennej  $z = \ln [P(m;r)/P(m;r-1)]$ : AD = 12,42, p-value = 3.128e-06, zaś dla zmiennej  $z = \ln [P(m)/P(m-1)]$ : AD = 17,33, p-value = 3.125e-06. Zatem w obu przypadkach należałoby odrzucić hipotezę o normalności rozkładów empirycznych zmian wskaźników cen ubezpieczeń.

O jakości dopasowania rozkładu teoretycznego do empirycznego świadczyć mogą nie tylko bardzo wysokie wartości *p-value* uzyskane w ramach testu Andersona-Darlinga, ale także empiryczny kształt funkcji rozkładu na tle funkcji teoretycznej (dopasowanej), co przedstawiono na poniższych wykresach (3. i 4.). Widać zatem, że rozkłady stabilne o oszacowanych parametrach mogą bardzo dobrze opisywać rozkłady zmian wskaźników cen ubezpieczeń, w przeciwieństwie do rozkładu normalnego.

Powyzsza obserwacja dotycząca charakterystyki rozkładów zmian wskaźników cen ubezpieczeń pozwala wysnuć pewne wnioski dotyczące polityki cenowej panującej na rodzimym rynku. Patrząc na kurtozę obu rozkładów empirycznych (smukłość rozkładów, dużo obserwacji

skoncentrowanych wokół maksimum rozkładu), można stwierdzić, że w przeważającej większości ubezpieczyciele dokonują małych zmian cen swoich produktów, tak aby na bieżąco reagować na sytuację rynkową. Zmiany te jednak co do zasady skutkują powolnym wzrostem cen (ujemne parametry skośności). Zdarzają się jednak okresy (por. wyk. 1. i wyk. 2.), kiedy zmiany cen znacząco odbiegają od maksimum rozkładu. Są to obserwacje z tzw. „ogonów rozkładów”. Okresy takie mogą świadczyć o silnej presji cenowej konkurencji lub o przeszacowaniu przez zakłady ubezpieczeń składki za ryzyko uwzględnionej w cenie ubezpieczenia. Po okresach tych zwykle następuje stabilizacja zmian cen, co może oznaczać, że rynek wraca do równowagi. Okresy zmian cen znacząco odbiegających od maksimum rozkładu to także czas istotny z punktu widzenia rentowności całego sektora.

## Podsumowanie

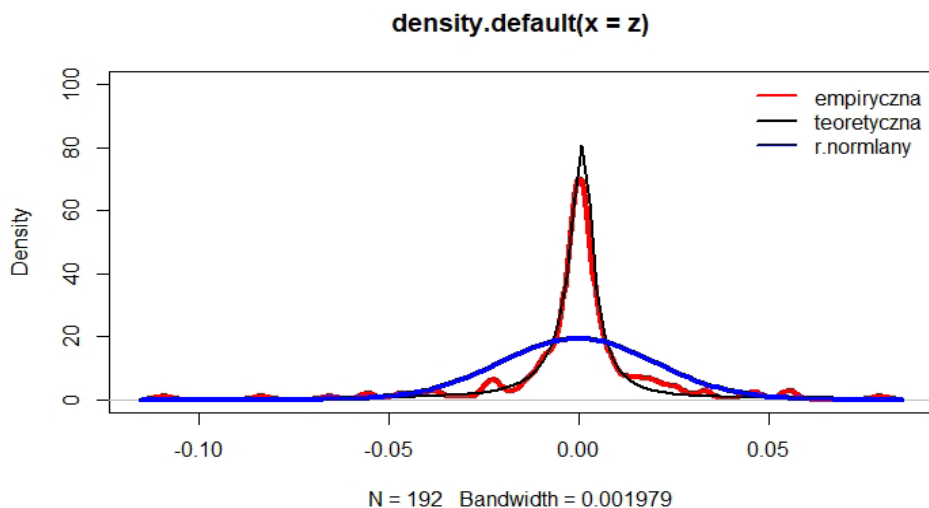
W ramach niniejszej pracy dokonano weryfikacji możliwości zastosowania rozkładu stabilnego wraz z estymacją jego parametrów do rozkładu zmian wskaźników cen ubezpieczeń w Polsce. Badanie potwierdziło, że klasa rozkładów stabilnych może być bardzo użyteczna do opisu finansowych szeregów czasowych, takich jak wskaźniki zmiany cen ubezpieczeń publikowane przez Główny Urząd Statystyczny. Wyniki badania mogą mieć praktyczne zastosowanie. Znając rozkłady, jakim podlegają wskaźniki zmian cen ubezpieczeń, można w stosunkowo łatwy sposób modelować wpływ zmiany ceny na inne parametry rynku, m.in. przypis składki ubezpieczeniowej, poziom rezerw techniczno-ubezpieczeniowych czy rentowność całego sektora. Znając natomiast zależność popytu na ubezpieczenia jako funkcji jego ceny, można dokonywać badań dotyczących elastyczności cenowej popytu na ubezpieczenia.

Niniejsze badanie pozwoliło także wskazać cechy charakterystyczne rozkładów zmian cen ubezpieczeń – takie jak grube ogony i wyższy szczyt funkcji gęstości w porównaniu z rozkładem normalnym. Prawdopodobieństwo wystąpienia nietypowych zmian cen jest zatem większe niż w przypadku, gdyby miały one rozkład normalny.

Przeprowadzona analiza może być uznana za unikalny wkład do rozwoju nauki o finansach (ubezpieczeniach) – dzięki określeniu parametrów rozkładu stabilnego, jakim podlegają wskaźniki zmian cen ubezpieczeń w Polsce, oraz potwierdzeniu zasadności stosowania tej funkcji rozkładu. Według najlepszej wiedzy autora brak jak dotąd badań i opracowań w tym zakresie.

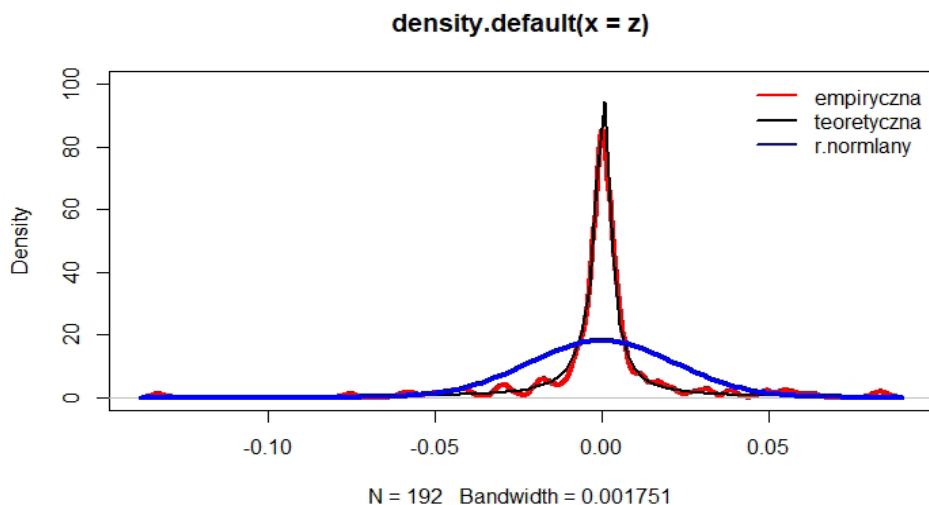
Dalsze badania w tych zagadnieniach mogą dotyczyć możliwości dopasowania grupy rozkładów stabilnych do wskaźników zmian cen ubezpieczeń w skali międzynarodowej, a także porównania otrzymanych wyników między krajami i wniosków z nich płynących. Dodatkowo interesujące byłoby zapewne porównanie rozkładów zmian cen ubezpieczeń na tle innych usług finansowych w Polsce.

Wykres 3. Empiryczna i teoretyczna (dopasowana) funkcja rozkładu zmiennej z wraz z empiryczną funkcją rozkładu normalnego, wyznaczone dla wskaźników rocznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m;r)/P(m;r-1)$  za okres od stycznia 2005 do grudnia 2020



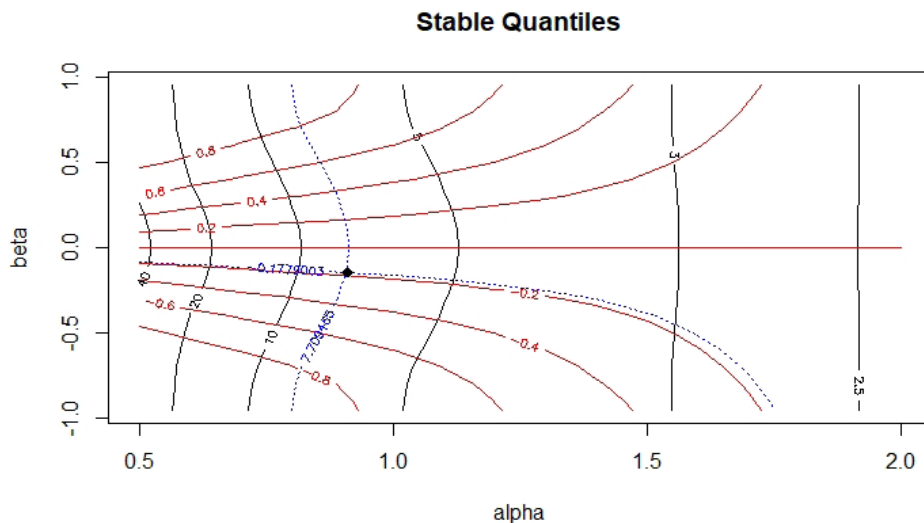
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Wykres 4. Empiryczna i teoretyczna (dopasowana) funkcja rozkładu zmiennej z wraz z empiryczną funkcją rozkładu normalnego, wyznaczone dla wskaźników miesięcznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m)/P(m-1)$  za okres od stycznia 2005 do grudnia 2020



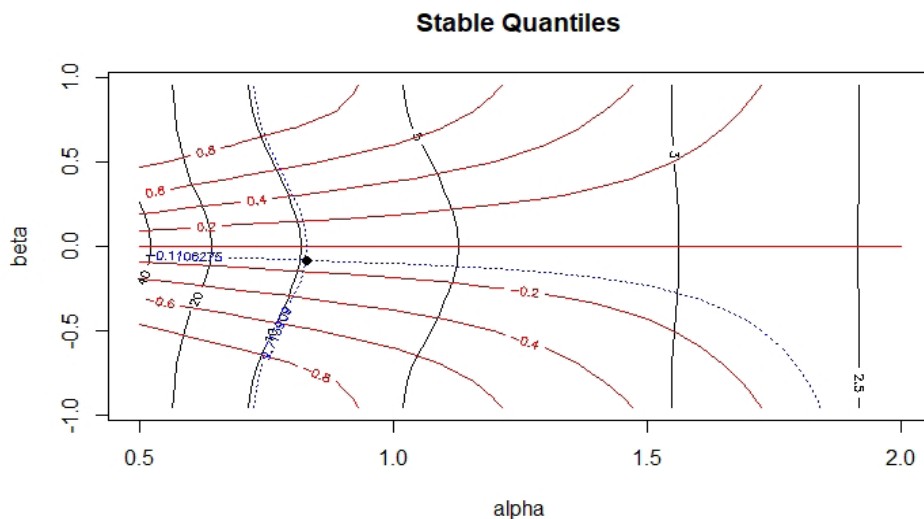
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Wykres 5. Zależność stabilności kwantyli od parametrów dopasowanego rozkładu stabilnego ( $\alpha$  i  $\beta$ ) dla zmiennej z wyznaczonej dla wskaźników rocznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m;r)/P(m;r-1)$  za okres od stycznia 2005 do grudnia 2020



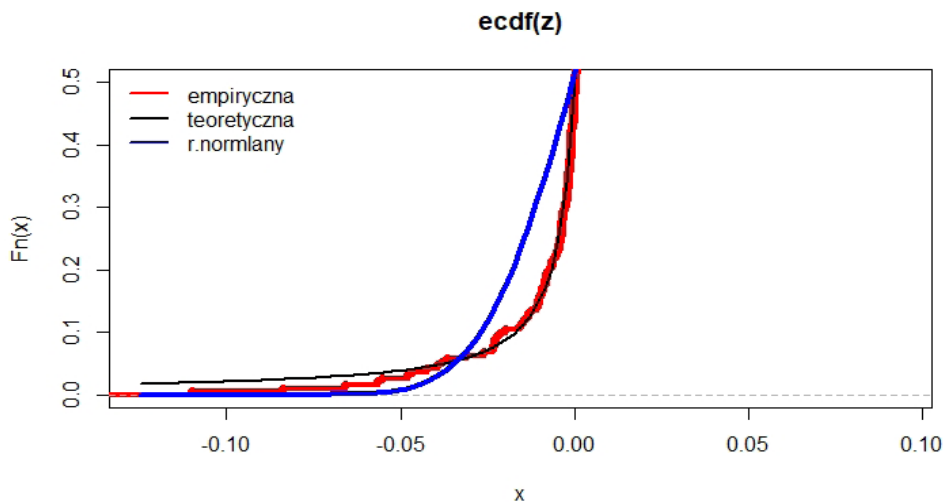
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Wykres 6. Zależność stabilności kwantyli od parametrów dopasowanego rozkładu stabilnego ( $\alpha$  i  $\beta$ ) dla zmiennej z wyznaczonej dla wskaźników miesięcznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m)/P(m-1)$  za okres od stycznia 2005 do grudnia 2020



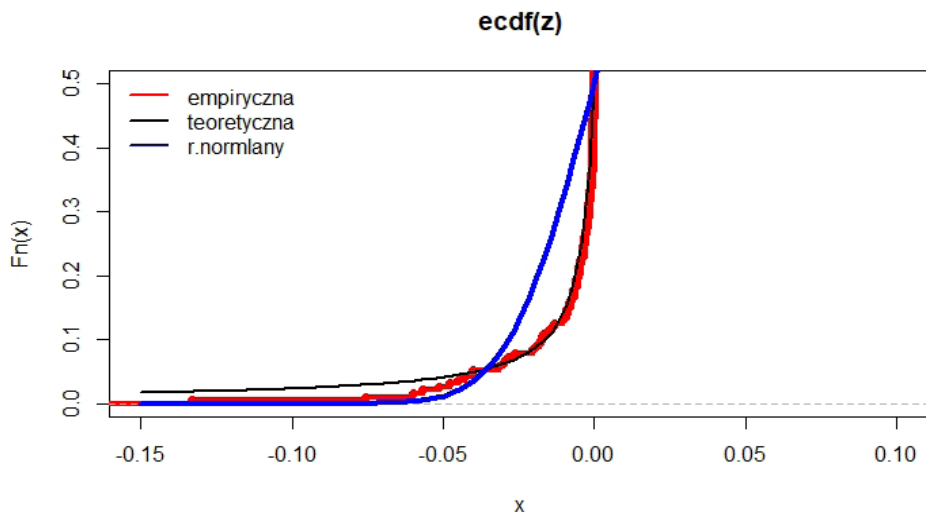
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Wykres 7. Empiryczna i teoretyczna (dopasowana) dystrybuanta rozkładu zmiennej z wraz z dystrybuantą rozkładu normalnego, wyznaczone dla wskaźników rocznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m;r)/P(m;r-1)$  za okres od stycznia 2005 do grudnia 2020



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.

Wykres 8. Połowa empirycznej i teoretycznej (dopasowanej) dystrybuanty rozkładu zmiennej z wraz z połową dystrybuanty rozkładu normalnego, wyznaczone dla wskaźników miesięcznych zmian cen ubezpieczeń  $P(m)/P(m-1)$  za okres od stycznia 2005 do grudnia 2020



Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS.



## Wykaz źródeł

- Asmussen, S., Schmidli H., Schmidt V., *Tail probabilities for nonstandard risk and queueing processes with subexponential jumps*, "Advances in Applied Probability" 1999, Vol. 31, Issue 2.
- Babbel D.F., *The Price Elasticity of Demand for Whole Life Insurance*, "The Journal of Finance" 1985, Vol. 40, No. 1.
- Basegmez H, Cekici E., *Financial applications of stable distributions: implications on Turkish stock market*, "Journal of Business, Economics and Finance" 2017, Vol. 6, Issue 4.
- Borak Sz., Härdle W., Weron R., *Stable Distributions*, "SFB 649 Discussion Paper" 2005–008, Berlin 2005.
- Browne M.J., Kim K., *An International Analysis of Life Insurance Demand*, "The Journal of Risk and Insurance" 1993, Vol. 60, No. 4.
- CRAN [The Comprehensive R Archive Network], *Opis zastosowanych w badaniu pakietów R*: <https://cran.r-project.org/web/packages/stabledist/stabledist.pdf>; <https://cran.r-project.org/web/packages/fBasics/fBasics.pdf>; <https://cran.r-project.org/web/packages/ADGofTest/ADGofTest.pdf> [dostęp: 22.02.2021].
- David M., *A review of theoretical concepts and empirical literature of non-life insurance pricing*, "Procedia Economics and Finance" Vol. 20, 7th International Conference on Globalization and Higher Education in Economics and Business Administration, GEBA 2013.
- Dragos S.L., *Life and non-life insurance demand: the different effects of influence factors in emerging countries from Europe and Asia*, "Economic Research – Ekonomska Istraživanja" 2014, Vol. 27, No. 1.
- Dumouchel, W.H., *Stable distributions in statistical inference*, "The Journal of the American Statistical Association" 1979, No. 78.
- Embrechts, P., Kluuppelberg C., Mikosch T., *Modelling Extreme Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlin 1997.
- EUROSTAT, RAMON [Reference And Management Of Nomenclatures], *European Classification of Individual Consumption according to Purpose adapted to the needs of the Harmonised Indices of Consumer Prices*, [https://ec.europa.eu/eurostat/ramon/nomenclatures/index.cfm?TargetUrl=LST\\_NOM\\_DTL&StrNom=HICP\\_2019&StrLanguageCode=EN&IntPckKey=43929646&StrLayoutCode=HIERARCHIC](https://ec.europa.eu/eurostat/ramon/nomenclatures/index.cfm?TargetUrl=LST_NOM_DTL&StrNom=HICP_2019&StrLanguageCode=EN&IntPckKey=43929646&StrLayoutCode=HIERARCHIC) [dostęp: 22.02.2021].
- Fortune P., *A Theory of Optimal Life Insurance: Development and Test*, "The Journal of Finance" 1973, Vol. 28, No. 3.
- Jaspersen J.G., *Hypothetical Surveys and Experimental Studies of Insurance Demand: A Review*, "The Journal of Risk and Insurance" 2016, Vol. 83, No. 1.
- Kateregga M., Mataramvura S., Taylor D., *Parameter estimation for stable distributions with application to commodity futures log-returns*, "Cogent Economics & Finance" 2017.
- Krężolek D., *Metody aproksymacji indeksu ogona rozkładów alfa-stabilnych na przykładzie GPW w Warszawie*, „Studia Ekonomiczne. Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach” 2013, nr 162.
- Łażewski M., Zator K., *Wykorzystanie metod analitycznych do wyznaczenia wielowymiarowych rozkładów alfa-stabilnych rozkładów prawdopodobieństwa*, „Acta Universitatis Lodzianensis. Folia Oeconomica” 2004, nr 177.

- Mandelbrot, B. [1959], *Variables et processus stochastiques de pareto-Lévy et la répartition des revenus*, "Comptes Rendus de l'Académie des Sciences" 1959, No. 249.
- Mandelbrot, B., *Paretian distributions and income maximization*, "The Quarterly Journal of Economics" 1962, No. 76.
- Mandelbrot, B., *The variation of certain speculative prices*, "The Journal of Business" 1963, No. 36.
- Mantis G., Farmer R.N., *Demand for life insurance*, "The Journal of Risk and Insurance" 1968, Vol. 35, No. 2.
- Nolan J.P., *Bibliography on stable distributions, processes and related topics*, <https://edspace.american.edu/jpnolan/wpcontent/uploads/sites/1720/2020/11/StableBibliography.pdf> [dostęp: 22.02.2021].
- Nolan J.P., *Stable Distributions Models for Heavy Tailed Data*, <https://edspace.american.edu/jpnolan/wp-content/uploads/sites/1720/2020/09/Chap1.pdf> [dostęp: 22.02.2021].
- Nolan J.P., *Maximum likelihood estimation and diagnostics for stable distributions* Birkhäuser Boston, Boston, MA 2001.
- Nolan J.P. *Numerical calculation of stable densities and distribution functions*, "Communications in Statistics, Stochastic Models" 1997, No. 13.
- Outreville J.F., *The relationship between insurance and economic development: 85 empirical papers for a review of the literature*, "Risk Management and Insurance Review" 2013, Vol. 16, No. 1.
- Śliwiński A., *Rola ubezpieczeń w gospodarce*, Oficyna Wydawnicza SGH, Warszawa 2019.
- Śliwiński A., *Popyt na ubezpieczenia na życie – przegląd badań światowych*, [w:] Nowak S., Nowak A.Z., Sopoćko A., *Polski rynek ubezpieczeń na tle kryzysów społeczno-gospodarczych*, Wydawnictwo Naukowe Wydziału Zarządzania Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2016.
- Walls W.D., *Modeling movie success when 'Nobody Knows Anything': Conditional stable-distribution analysis of film returns*, "Journal of Cultural Economics" 2005, No. 29.
- Ward D., Zurbruegg R., *Does Insurance Promote Economic Growth? Evidence from OECD Countries*, "The Journal of Risk and Insurance" 2000, Vol. 67, No. 4.
- Zolotarev V.M., *Statistical estimates of the parameters of stable laws*, "Banach Center Publications" 1980, No. 6.
- Zolotarev V.M., *One-dimensional Stable Distributions*, Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI 1986.
- Zietz E.N., *An examination of demand for life insurance*, "Risk Management and Insurance Review" 2003, Vol. 6, No. 2.

## Application of the $\alpha$ -stable distribution to modeling changes in insurance prices

*The main purpose of this work is attempt of application  $\alpha$ -stable distribution with its parameters estimation to the empirical distribution of changes in insurance price indexes in Poland. The  $\alpha$ -stable distribution, although commonly used in finance, is not very common in insurance. It is use mainly in insurance risk analysis and extreme value theory (due to its properties: "heavy tails", leptocurtility) rather than directly in insurance prices. Literature analysis shows that insurance prices have not yet been the subject of a review into the verifiability of the possibility of applying the  $\alpha$ -stable distribution (opposed to the prices of financial assets in different markets) and insurance prices are an important*

*determinant of the demand for insurance. As part of this work, parameters for the stable distribution of changes in insurance price indicators in Poland were estimated. The estimated distribution parameters allowed distribution to be stable matched with empirical data, which was confirmed by Anderson–Darling test. The study confirmed that the stable distribution class can be very useful for describing empirical data of financial time series such as insurance price changes in Poland.*

**Keywords:** insurance, price, stable distributions.

**MGR NORBERT DUCZKOWSKI** – doktorant w Szkole Głównej Handlowej, Szkoła Doktorska.

ORCID: 0000-0003-4543-2678

e-mail: nd110753@doktorant.sgh.waw.pl, norbert.duczkowski@gmail.com

